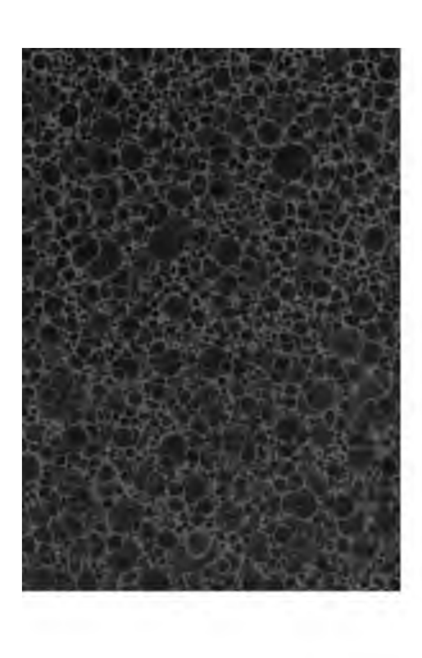
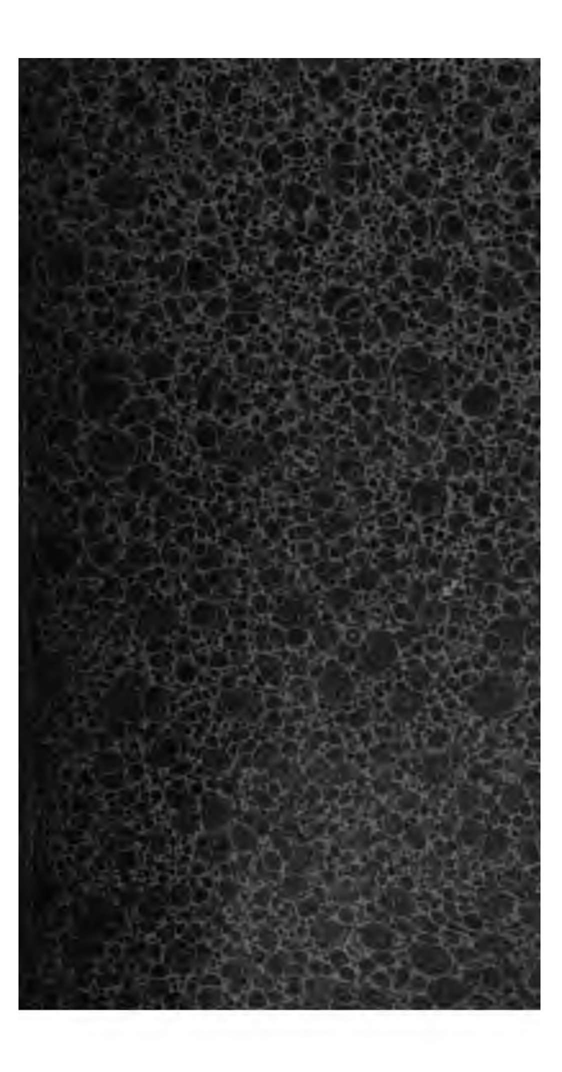
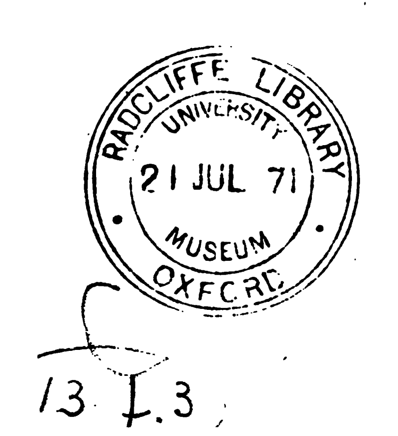








INSTRUCTIONS

POPULAIRES

SUR LE CALCUL

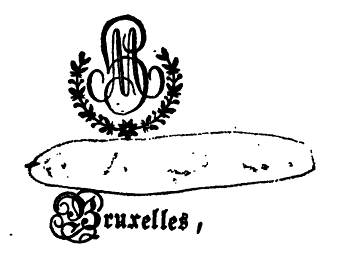
DES PROBABILITÉS



INSTRUCTIONS POPULAIRES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR A. QUETELET.

Mundum numeri regunt.

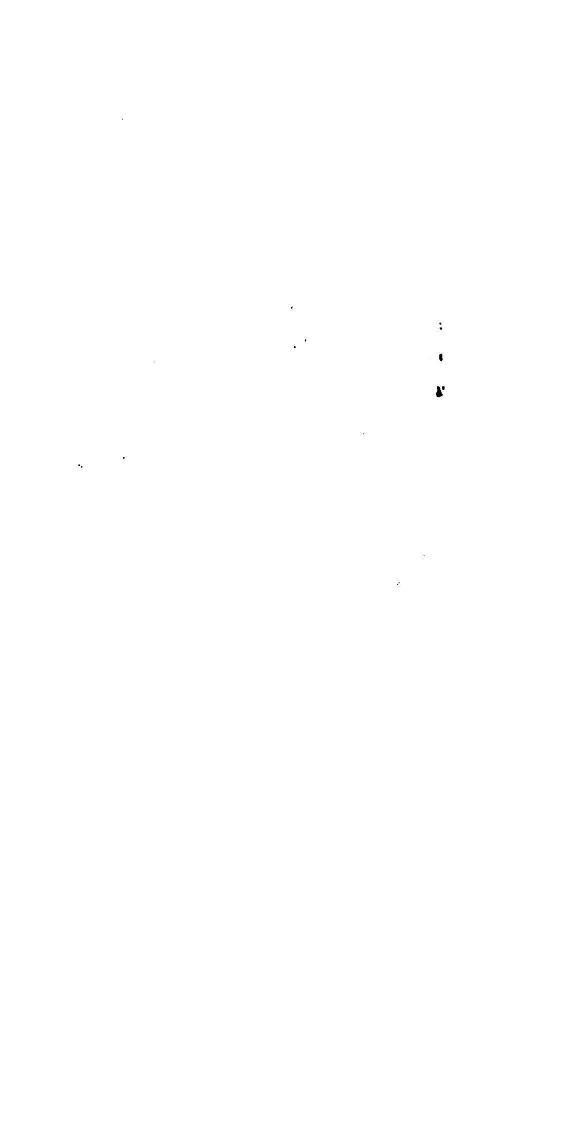


Bruxelles,

CHEZ H. TARLIER ET M. HAYEZ,

RUE DE LA MONTAGNE.

M DCCC XXVIII.



OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

QU'ON TROUVE CHEZ LE MÊME LIBRAIRE.

Positions de physique, ou Résumé d'un cours de physique générale, 3 vol. in-18 (le 3e vol. paraîtra sous peu).

Astronomie élémentaire, 1 vol. in-12.

Astronomie populaire, 1 vol. in-18.

Recherches sur la population, les naissances, etc., 1 vol. in-8o.

Correspondance mathématique et physique; Recueil périodique, in-8o, dont le 4e vol. paraît actuellement.



Préface.

Ce petit ouvrage, que je livre au public, est le résumé des leçons que je donne depuis plusieurs années au *Musée* de Bruxelles, pour servir d'introduction à mes cours de physique et d'astronomie. Il m'a paru que le *calcul des probabilités*, malheureusement trop négligé, devrait, d'après l'état actuel des lumières, servir de base à l'étude de toutes les sciences et particulièrement des sciences d'observation. La plupart de nos connais-

que le vulgaire apprécie vaguemen
et comme par instinct, mais que
philosophe ou du moins l'homme qu
aspire à mériter ce titre, doit savo
apprécier d'après des règles sûre.
Presque tous nos préjugés naissen
de cette habitude de prononcer su
de simples aperçus, mais ils ne sau
raient soutenir un examen rigoureux
Partout où les choses ont pu êtr
exprimées par des nombres, on a pri

pour objet que la considération des jeux de hasard, prit bientôt un essor plus élevé ; il prêta sa lumière à l'homme d'état pour régler les élections, pour examiner les modes d'organisation des tribunaux les plus avantageux : il guida la marche de l'observateur dans ses recherches sur les naissances et les décès ; fixa les bases des sociétés d'assurances, jeta un nouveau jour sur le système de notre univers et donna naissance à la statistique, cet arsenal redoutable où l'orateur, en montant à la tribune, va prendre aujourd'hui ses armes les plus sûres.

Le titre de cet opuscule annonce

croix, de *Parisot*, de l'illustr
Place, etc., auxquels j'ai fait
même de nombreux emprunts.
leçons XII et XIII sont extraite
grande partie de l'excellente in
duction aux *recherches statistique*
la ville de Paris, qui est due à
des géomètres les plus distingu
cette époque : la règle des
dres carrés, qui n'était guère
ployée que par les astronomes
dans les connaissances des l
mathématiques, y est exposée

observateurs les moins exercés aux calculs. Je dois cependant prévenir que je suppose dans mes lecteurs la connaissance des premières règles de l'arithmétique, connaissance que, d'après l'état actuel de l'enseignement en Belgique, on peut raisonnablement supposer à toute personne qui sait lire et écrire. Je m'estimerai fort heureux si ce faible essai peut être de quelqu'utilité, et ramener l'attention sur une branche des mathématiques éminemment en harmonie avec les progrès actuels des sciences.

+ *Plus*, signe d'addition.

— *Moins*, signe de soustraction.

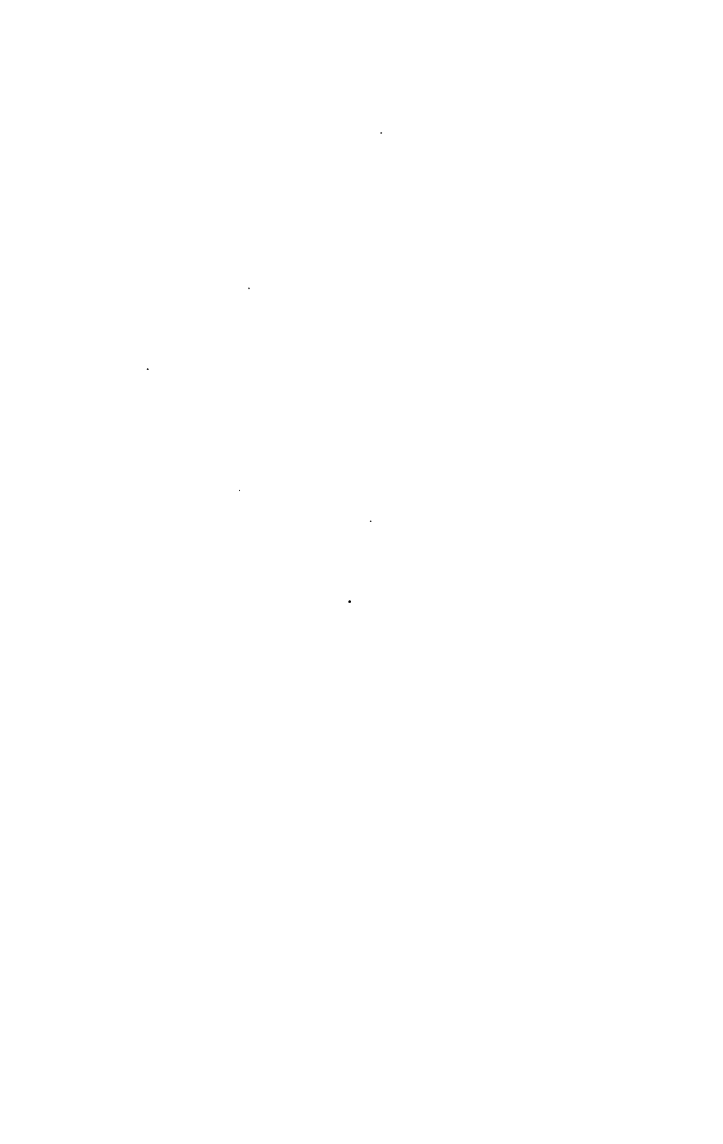
× *Multiplié par*, signe de multi
quelquefois on le remplace par un po
on écrira indistinctement 3 × 4 ou 3
indiquer que 3 doit être multiplié p
nombres 3 et 4 sont les deux *facteur*
duit 12. Quand un même facteur
plusieurs fois dans un même produit
ploie une notation plus simple, ainsi
sente 3 × 3, et 5^3 représente 5 × 5

Pour indiquer qu'une quantité doit ê
par une autre, on écrit la première au
la seconde, en séparant l'une de l'au

être divisé par 6. On dit que les nombres écrits de la manière précédente, sont mis sous forme *fractionnaire ;* 15 est le *numérateur*, et 6 est le *dénominateur*.

On nomme *carré* d'un nombre, le produit de ce nombre multiplié par lui-même ; par exemple, 25 et le carré de 5 ; 36 est le carré de 6. La racine carrée d'un nombre est une quantité telle qu'en la multipliant par elle-même, elle reproduit le nombre proposé : par exemple, 5 est la racine carrée de 25 ; 6 est la racine carrée de 36. On indique de cette manière $\sqrt{25}$ qu'il faut extraire la racine carrée de 25; de même $\sqrt{36}$ indique 6, la racine carrée de 36.

Pour montrer que deux quantités sont égales, on les sépare par le signe $=$.



INSTRUCTIONS
POPULAIRES
SUR LE CALCUL
DES PROBABILITÉS.

PREMIÈRE LEÇON.

—

De la certitude et de la probabilite.

QUAND différens cas peuvent donner naissance à un événement, on les nomme les *chances* de cet événement.

EXEMPLES. Le tirage d'un numéro à la loterie présente 90 chances; puisque 90 numéros différens peuvent amener l'événement attendu. Le jet d'un point désigné, avec un dé ordinaire, présente

peut amener l'événement a

Quand la nature de l
qu'on espère est désigné
deux espèces de chances ,
vorables et les autres *cont*
vénement espéré.

Ex. Pour le tirage d'une
un jeu de 32 cartes , on a
favorables , c'est-à-dire ant
figures , et 20 chances cont

Quand toutes les chances
rables à l'événement attend
semble constitue la *certitude*

Ex. Une urne contient

étant favorables, on dit qu'on a la certitude de l'arrivée de l'événement espéré.

Quand il n'y a qu'un certain nombre de chances favorables à l'événement attendu, cet événement est *probable*.

Ex. Si une urne renferme trois boules, une blanche et deux noires, la sortie de la boule blanche est un événement probable; sur trois chances, on n'en a qu'une seule favorable. On espère de ›rendre un *roi* dans un jeu ordinaire e 32 cartes; cet événement est encore ›obable : sur 32 chances on n'en a e 4 favorables, l'un ou l'autre de atre *rois* que peut amener le tirage.

Tous les événemens ne sont pas *éga-ent probables*, et leurs degrés diffe-

nces favorables.

x. Une urne contient 20 boules
iches et 5 noires; la sortie d'une
le blanche offrant plus de chances
orables que la sortie d'une boule
re, on dit qu'elle est plus probable
l'autre. De même, dans un jeu de
cartes, le tirage d'une figure est
ins probable que celle d'une autre
te.

Le calcul qui enseigne à trouver le
gré de probabilité d'un événement se

calculable, c'est ce qui a lieu pour la plupart des jeux de hasard; on peut alors estimer généralement avec assez de facilité la probabilité de cet événement, comme nous le verrons dans ce qui va suivre. Dans d'autres cas, le nombre des chances est *illimité*; c'est ce qui a lieu pour la plupart des sciences d'observation. On doit alors estimer la probabilité de l'événement au moyen d'un certain nombre de chances que l'on obtient par expérience. La considération de ces sortes de probabilités formera la seconde partie de cet essai : pour donner dès à présent un exemple de leur existence, supposons une urne renfermant un nombre infini de boules dont on ne connaît pas les couleurs;

ḍait de cette urne que des
ches, et l'on demande quell
babilité que l'urne ne cont
boules de cette couleur. I
ici qu'il est probable que l'ı
tient que des boules blanch
regardons pas en effet cett
comme une certitude ; car
par exemple, se trouver dan
ou plusieurs boules noires
ont pas encore été tirées.
quoiqu'ayant vu avec régula
plusieurs milliers d'années,
lever périodiquement

levera encore demain; car il existe peut être telle loi dans la nature qui ne s'est pas encore manifestée et qui empêchera demain le lever du soleil. Nous n'avons peut être pas été a même d'examiner toutes les chances possibles.

On conçoit néanmoins qu'il est des probabilités si fortes qu'on peut les regarder à peu près comme des certitudes.

Ex. Dans ce cas sont les probabilités de voir le soleil se lever demain; ou de tirer une boule blanche d'une urne dont, après un nombre considérables de tirages, on n'a jamais extrait que des boules blanches, on peut y ajouter aussi la probabilité de vivre encore dans cinq minutes, pour un

ıme une certitude, quoique l'on ait bien souvent l'homme qui promet-le plus de jours, frappé par une rt subite.

Nous regarderons toujours les événemens comme dépendans de causes i les produisent; et le *hasard* ne ra considéré par nous que comme gnorance ou nous sommes de ces raies causes. On dit qu'un grain de oussière, qu'une simple molécule 'air ou de vapeur flotte au hasard, ce-

rence entre elles que celle qu'y met notre ignorance.

Questions.

Que nommez-vous chances d'un événement?

Que nommez-vous chances favorables et chances contraires d'un événement?

Qu'est-ce que la certitude?

Qu'est-ce que la probabilité?

Donnez des exemples de la certitude et de la probabilité; y a-t-il différens degrés de probabilité?

Qu'est-ce que le calcul conjectural ou calcul des probabilités?

Le nombre des chances d'un événement est il toujours limité et calculable?

ɔre la probabilité de cet événe-
ıt?

Ɛst-il des probabilités assez grandes
ır pouvoir être considérées comme
; certitudes ?

Comment devons-nous considérer ce
'on nomme le *hasard?*

IIe LEÇON.

De la probalité mathematique.

Dans le cas où toutes les chances d'un événement sont également possibles, *la probabilité mathématique s'estime en divisant le nombre de chances favorables à l'événement par le nombre total des chances.*

Exemples. Si une urne contient trois boules blanches et deux noires, on a trois chances favorables sur cinq chances pour la sortie d'une boule blanche; et l'on dit que la probabilité mathématique de l'événement attendu est $\frac{3}{5}$.

cartes, on compte 12 figures.

La probabilité *contraire* à l'événement attendu s'estime de la même manière; c'est-à-dire en divisant le nombre de chances défavorables par le nombre total des chances.

Ex. Dans les exemples précédens, les probabilités contraires aux deux événemens attendus étaient $\frac{2}{5}$ et $\frac{20}{32}$.

En général, chaque événement incertain donne lieu à deux probabilités opposées, savoir : celle que cet événe

Ex. La probabilité de prendre une figure dans un jeu de 32 cartes est $\frac{12}{32}$, la probabilité contraire est $\frac{20}{32}$, et la somme de ces probabilités est $\frac{12}{32}$ plus $\frac{20}{32}$ ou bien 1. *Il suffira donc par la suite de soustraire de 1 la probabilité mathématique favorable à l'événement, pour avoir la probabilité contraire.* La probabilité mathématique d'un événement doit, d'après ce qui précède, être exprimée par une fraction proprement dite, puisque le nombre des chances favorables ne peut surpasser le nombre total des chances.

On conçoit que plus le nombre des chances favorables à l'événement que l'on considère, sera considérable par

evenement sera forte.

Ex. La probabilité $\frac{12}{32}$ est plus gr

que la probabilité $\frac{4}{32}$; on exprim

de la première manière la probal

mathématique de prendre une fi

dans un jeu de 32 cartes; et de l

conde, la probabilité mathématique

prendre un des quatre as.

Quand toutes les chances devienn

favorables, il y a *certitude*, et le

mérateur de la fraction devient égal

dénominateur, ensorte que ...

Ex. On demande si le jet de l'*as* ivec un dé à six faces est plus probable [ue le tirage d'une figure en cœur dans in jeu de 32 cartes. Or, la première robabilité est $\frac{1}{6}$, et la seconde $\frac{3}{32}$, es fractions réduites au même dénoiinateur donnent $\frac{32}{192}$ et $\frac{18}{192}$. Le preiier événement est donc plus probable ue le second.

Le défaut d'habitude où nous somies d'estimer les probabilités des vénemens incertains, fait que nous ous trompons la plupart du temps ès-grossièrement sur leurs valeurs; il ous faudrait avant tout un *terme comvrable*, qui pût nous servir pour ctifier nos jugemens : le moyen le *us* simple semblerait être de concevoir

oules blanches et noires qui seraient contenues dans une urne : l'arrivée de événement attendu serait assimilée de ette manière au tirage d'une boule blanche.

Ex. Qu'elle est la probabilité de jeter l'*as* avec un dé à six faces ? Comme nous n'avons qu'une chance sur six, la probabilité est $\frac{1}{6}$, la même que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contient six boules, savoir : une blanche et cinq noires ; ou bien encore qu'elle est la probabilité de prendre un roi dans un jeu de 32 car-

la même que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contient 32 boules, savoir : 4 blanches et 28 noires.

En faisant croître ou décroître dans le même rapport, le nombre des chances favorables et celui de toutes les chances possibles, la probabilité reste la même ; ainsi au lieu de la probabilité $\frac{4}{32}$ on peut prendre la probabilité $\frac{1}{8}$ qui lui est égale. La probabilité de prendre une boule blanche dans une urne qui contient 32 boules, savoir : 4 blanches et 28 noires, est donc la même que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contient 8 boules, savoir : une blanche et 7 noires ; ce moyen de *simplification* qui dépend de la pro-

Le moyen que nous avons indiq
pour estimer la valeur des probabilit
présente cependant un inconvénien
c'est qu'il nous serait assez diffici
d'apprécier quelle grandeur doit a
teindre la probabilité pour pouvo
être classée parmi les probabilités qu
nous avons l'habitude de considére
comme des certitudes. Le meilleu
terme de comparaison semblerait être l
probabilité de vivre encore un certai
espace de temps. Cette

les yeux sur une table de mor-
; sur celle des provinces méridio-
des Pays-Bas, par exemple; nous
ns que sur 51956 jeunes gens de
s, le dixième a cessé d'exister au
le 7 ans environ. Ainsi à cet âge
babilité de mourir dans l'espace
ans est $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire un peu
lre que la probabilité de prendre
emier coup un roi dans un jeu de
rtes. En faisant des calculs sem-
:s pour les époques auxquelles
it d'existe successivement le $\frac{1}{100}$,
; des 51956 jeunes gens que nous
considérés précédemment, on
le petit tableau suivant, au-
nous pourrons recourir par la

$\frac{1}{10}$ . . . . 7 ans.

$\frac{1}{100}$ . . . . 8 mois.

$\frac{1}{1000}$ . . . . 25 jours.

$\frac{1}{10,000}$ . . . . 60 heures

$\frac{1}{100,000}$ . . . . 6 id.

$\frac{1}{1,000,000}$ . . . . 36 minutes

$\frac{1}{10,000,000}$ . . . . 4 id.

$\frac{1}{100,000,000}$ . . . . 22 secondes

$\frac{1}{2,000,000,000}$ . . . . 1 id.

rale, et qu'ils ne sont pas applicables à un individu en particulier, qui serait actuellement bien portant ; il faut les considérer comme les probabilités que l'enfant qui vient de naître, s'il atteint l'âge de 20 ans, mourra avant un certain temps désigné dans le tableau.

Ex. Supposons maintenant que l'on cherche à savoir quelle est la probabilité qu'en prenant les lettres du mot *Constantinople* et qu'en les jetant en l'air, elles recomposeront le même mot. On sait par des calculs qui ne peuvent trouver place ici, que nos 14 lettres peuvent être arrangées de plus de 87,000,000,000 manières différentes, en ne reproduisant que 24 fois le même mot; on aurait donc pour probabilité

de mourir dans l'espace d'une secon
à l'âge de 20 ans. Or, nous ne faisc
pas difficulté de regarder comme ce
tain que l'enfant qui vient de naîtr
s'il atteint l'âge de 20 ans, pourr
compter encore sur une seconde d'exis
tence; on peut donc regarder aussi
comme certain qu'on ne jettera pas du
premier coup le mot *Constantinople*
avec les lettres qui le composent.

Nous croyons pouvoir poser qu'en
général on ne ferait pas diffi

abilité contraire $\frac{1}{1,000,000}$. Ainsi
regarderons comme à peu près
ins les événemens qui n'ont pour
abilités contraires que des fractions
dres qu'un millionième; tel serait le
e d'une boule blanche dans une ur-
i contiendrait 1 million de boules,
r : 999,999 blanches et une noire.

Questions.

uelle est la probabilité mathémati-
l'un événement ?
onnez des exemples du calcul de la
abilité mathématique ?
omment calcule-t-on la probabilité
aire à l'événement ?
uelle est la valeur des deux proba-
és d'un événement ?

tiquement les divers degré
bilités ?

Quand y a-t-il certitude ?

Quel est le symbole de la

Comment rend-on les
comparables ?

Ne serait-il pas désirable
terme comparable pour s
juste idée de la grandeur
probabilités ?

Peut-on simplifier l'expre
probabilité mathématique ?

Quels moyens pourrait-o

ıns quel cas considérons-nous ha-
ǝllement comme certain un événe-
t qui n'est que probable ?

IIIe LEÇON.

De la probabilité simple et probabilité composée.

Quand un événement dépend sieurs événemens *indépendans* l des autres, on dit qu'il est *comp*

Exemple. Le jet successif de du point *deux*, avec un dé ord à six faces, est un événement co qui dépend de deux événemens rement indépendans l'un de l'autr voir : le jet de l'*as* et celui du point

énement composé dépendait de
vénemens simples qui sont le jet
et celui du point *deux*.

; avons vu dans la leçon précé-
que la probabilité d'un événe-
imple que nous nommerons *pro-
; simple*, s'estime en divisant le
e de chances favorables par le
e total des chances.

*robabilité composée, c'est-à-dire
babilité mathématique d'un évé-
t composé, s'obtient en faisant
duit des probabilités de tous les
iens simples dont cet événement
sé dépend.*

La probabilité de jeter l'*as* et
: point *deux* avec un dé ordinai-
calculerait de la manière sui-

point *deux* est également $\frac{1}{6}$
de ces deux probabilités pa
bien $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ forme l
de l'événement attendu :
reconnaîtra avec un peu
qu'il y a 36 chances égale
bles sur lesquelles une se
rable, comme on peut le
mant le tableau suivant :

1 et 1	2 et 1	3 et 1	4 et 1
1 . 2	2 . 2	3 . 2	4 2
1 . 3	2 . 3	3 . 3	4 3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Quelle est la probabilité de prendre successivement l'as, le roi, la dame et le valet de cœur dans un jeu de 32 cartes, en ayant chaque fois l'attention de remettre dans le jeu la carte tirée? L'événement composé dépend ici de quatre événemens simples, qui ont chacun leur probabilité égale à $\frac{1}{32}$; la probabilité composée vaudra donc $\frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{32}$ ou bien $\frac{1}{1,048,576}$. Ainsi l'événement que l'on attend est moins probable que la supposition qu'un enfant qui vient de naître, mourra précisément pendant les 36 minutes qui suivront l'instant où il aura atteint sa 20[e] année. Nous avons déjà vu que des événemens qui ont une si faible probabilité sont considérés comme extraordinaires

3.

20 fois de suite
pile ou *croix?* N(
deux chances don
ble : la probabilité

la probabilité compo:

à-dire moindre que
donc encore ranger
que nous considérons
naire l'arrivée de *pile*

Un fait qui, sans êtr
n'a aucune probabili
nous est transmis par
de manière que le pro

est la probabilité du fait, sachant que la probabilité de chaque témoignage est égale à $\frac{9}{10}$ (*)? On aura pour la probabilité demandée $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$, c'est-à-dire moins que $\frac{1}{8}$. Le fait sera donc moins probable que le tirage d'un as dans un jeu de 32 cartes.

« On ne peut mieux comparer cette diminution de la probabilité, comme l'a observé M. *De la Place*, qu'à l'extinction de la clarté des objets, par l'interposition de plusieurs morceaux de verre ; un nombre de morceaux peu considérable, suffisant pour dérober la vue d'un objet qu'un seul morceau

(*) C'est-à-dire que sur 10 témoignages, on peut en compter 1 faux.

avoir fait assez d'attention
gradation de la probabilité
lorsqu'ils sont vus à travers
nombre de générations su
plusieurs événemens historiq
tés certains, seraient au m
teux, si on les soumetta
épreuve. »

Questions.

Qu'est-ce qu'un événemen
Qu'est-ce qu'un événeme
Que nomme-t-on probabi
et probabilité composée ?

Donnez un exemple du calcul de la probabilité composée dans le jet des dés?

Donnez un exemple du calcul de la probabilité composée dans le tirage des cartes ?

Donnez un exemple du calcul de la probabilité composée dans l'estimation des témoignages ?

Comment peut-on se représenter la diminution de la probabilité ?

—

De la probabité relative.

Quoique nous n'ayons considéré qu'à présent que deux espèces de « il peut cependant s'en présenter un] grand nombre.

Exemple. Si l'on demandait la : babilité de prendre dans un jeu d cartes, une figure ou bien un as aurait trois événemens possibles « les probabilités seraient :

$\frac{12}{32}$ pour une figure.

4

dans une urne on avait 20 bou-
savoir : 8 blanches, 4 noires, 3
es et 5 vertes ; on aurait, pour le
e, quatre sortes de chances dont
robabilités seraient :

$\frac{8}{20}$ pour une boule blanche.

$\frac{4}{20}$ — — noire.

$\frac{3}{20}$ — — rouge.

$\frac{5}{20}$ — — verte.

a somme de ces probabilités, comme
s l'exemple précédent, doit valoir
ité.

renons encore un troisième exem-
Quelles sont les probabilités de
r avec deux dés 7, 8, 9 ou 10 points?
oints peuvent être amenés de six

... nous avons
car on peut jeter 1 et 6,
3, 5 et 2, 6 et 1; de mê
vent être amenés de cin
quatre manières et 10 d
seulement. On aura do
babilités de ces sortes d
observant qu'il y a 36
possibles:

$\frac{6}{36}$ pour amener 7

$\frac{5}{36}$ — — — 8

$\frac{4}{36}$ — — — 9

3

Le plus souvent on ne considère que la probabilité *absolue* des événemens, cependant on peut quelquefois désirer de connaître une probabilité *relativement* à d'autres.

Ex. Quelles sont les probabilités re-atives de prendre une figure ou un as ans un jeu de 32 cartes ? Nous avons u que d'une part on a 12 chances t de l'autre 4 : ainsi en considérant omme nulles toutes les autres chances, ne faudrait avoir effectivement égard u'à 16 chances, l'une des probabilités erait $\frac{12}{16}$ et l'autre $\frac{4}{16}$; la première erait donc triple de la seconde.

Dans le second exemple qui précède, s probabilités relatives d'amener une ule blanche ou une noire, seraient

leur.

Dans le troisième exemple
bilité d'amener 7 points avec
est double de celle d'amener
On a effectivement 6 chanc
bles au premier événement
ces seulement pour le secon
chances en tout, en omett
tres chances qui ne font ni
gagner.

Quelquefois un événeme
de plusieurs chances qui n
également possibles, il faut
[illegible] *les probabilités respec*

Ex. Deux personnes jouent ensemble
: l'une parie d'amener du premier
›up avec deux dés 7, 8, 9 ou 10
›ints : d'après ce que nous avons vu
écédemment, les probabilités respec-
'es de ces événemens sont $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$,
et $\frac{3}{36}$: la probabilité que la pre-
ère personne gagnera sera donc
, la somme des probabilités pré-
lentes, et la probabilité contraire
'a aussi $\frac{18}{36}$.

La probabilité de prendre une figure
un as dans un jeu de 32 cartes, vau-
it $\frac{12}{32}$ plus $\frac{4}{32}$ ou $\frac{16}{32}$; c'est-à-dire
somme des probabilités des deux
›èces de chances qu'on réunit en sa
eur.

Tous conclurons de tout ce qui pré-

..ement attendu est *simple* ou *comp*
et si les chances qui doivent l'am
sont toutes également possibles ou
elles ne le sont pas. Enfin, il faudra
miner si la probabilité doit être pr
d'une manière *absolue* ou *relativ*
c'est-à-dire si les chances favorables d
vent être comparées à toutes les chan
ces ou à quelques-unes en partic
lier.

Questions.

N°...

Peut-on estimer une probabilité rélativement à d'autres?

Donnez des exemples des probabilités relatives ?

Les chances d'un événement sont-elles toujours également possibles ?

Comment calcule-t-on la probabilité d'un événement dont toutes les chances ne sont pas également possibles ?

Donnez des exemples du calcul de la probabilité d'un événement dont toutes les chances ne sont pas également possibles?

Que peut-on conclure de tout ce qui précède ?

Ve LEÇON.

Des épreuves répétées.

Nous nommerons *épreuves répé*
celles qui se font successivement
les mêmes circonstances ; comm
raient par exemple, les tirages de c
prises dans un jeu et remises ch
fois ; ou les jets successifs d'un m
dé.

six faces, amener l'*as* trois fois de suite ; la probabilité mathématique sera $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{216}$: l'événement attendu dépend en effet de trois événemens simples dont il faut multiplier les probabilités entre elles. On espère prendre dans un jeu de 32 cartes, soit un roi, soit une dame trois fois de suite, en ayant soin de remettre à chaque nouveau tirage, la carte que l'on a prise; la probabilité sera $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$: en observant que l'événement dépend de trois événemens simples qui ont chacun pour probabilité $\frac{1}{4}$, puisqu'on a pour soi 8 chances sur 32.

Quelle est la probabilité, dans deux épreuves répétées au jeu de *pile ou croix*, d'amener d'abord pile et puis

tés des deux événemens sim
probabilité aurait été $\frac{1}{2}$, si l'
posé la condition d'amener
pile et une fois croix, n'impo
quel ordre ; il peut en effet
quatre événemens composés
chacun pour probabilité $\frac{1}{4}$; sa
jet de pile deux fois de suite ;
croix deux fois de suite ; le jet
et croix, et enfin le jet de croi
Or, on a pour soi les probabi
deux derniers événemens, c'e
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ou bien $\frac{1}{2}$.

On remarquera qu'en génér

bles, quand chaque épreuve ne peut amener, comme dans l'exemple précédent, que deux événemens simples différens que nous désignerons par les lettres A et B. Ces événemens se présenteront en effet dans l'ordre suivant :

AA, AB, BA, BB.

Si l'on faisait une troisième épreuve, le nombre des événemens possibles se trouverait doublé, et l'on en aurait huit; en effet, avec chacun des quatre événemens indiqués, pourrait se présenter encore ou l'événement A, ou l'événement B, ce qui donnerait lieu aux événemens composés qui suivent :

AAA, ABA, BAA, BBA . . . . . pour A
AAB, ABB, BAB, BBB . . . . . — B

trouverait doublé encore e
aurait seize; en effet, avec ch
huit événemens indiqués, po
présenter encore ou l'événeme
l'événement B, ce qui donne
aux événemens composés qui

AAAA, ABAA, BAAA, BBAA
AABA, ABBA, BABA, BBBA } . .

AAAB, ABAB, BAAB, BBAB
AABB, ABBB, BABB, BBBB } . .

En suivant les mêmes raison
on trouverait qu'en faisant u
quième épreuve, le nombre de

u'on pourrait former le petit tableau
uivant :

NOMBRE D'ÉPREUVES.	ÉVÉNEMENS POSSIBLES.
1	2 . . 2
2	4 . . 2.2
3	8 . . 2.2.2
4	16 . . 2.2.2.2
5	32 . . 2.2.2.2.2
6	64 . . 2.2.2.2.2.2
7	128 . . 2.2.2.2.2.2.2
8	256 . . 2.2.2.2.2.2.2.2
9	512 . . 2.2 2.2.2.2.2.2.2
10	1024 . . 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2

)n voit que le nombre des événe-
ıs composés différens devient consi-
ıble, quand on a égard à l'ordre
s lequel se présentent les événemens

EXEMPLE. Supposons maintenant qu'on veuille connaître la probabilité qu dans une urne qui contient une bo blanche et deux noires, on pren dans quatre tirages, les deux pren res fois une boule blanche, et les d dernières fois, une boule noire. ayant la précaution de remettre c que fois la boule tirée. En consul le tableau que nous avons formé haut, on trouvera que sur seize nemens possibles, un seul est fav ble à l'attente, savoir AABB. I supposons que A désigne l'arrivé

vénement A est $\frac{1}{3}$, et celle de l'événement B est $\frac{2}{3}$; donc, la probabilité demandée sera

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81}.$$

La probabilité contraire serait $\frac{77}{81}$, en observant que les deux probabilités ajoutées ensemble doivent reproduire l'unité.

En général, si dans des épreuves répétées, on espère qu'un événement A arrivera un certain nombre de fois, et qu'un événement B arrivera aussi un nombre de fois désigné, et si de plus l'ordre de sortie est désigné ; la probabilité demandée sera un produit qui renfermera la probabilité simple de

B aussi autant de fois en fa
le second événement doit a
fois.

Ex. Quelle est la probabilité
dre dans un jeu de 32 cartes,
de suite une figure, puis troi
suite un as? La probabilité de
une figure étant $\frac{3}{8}$, et celle de
un as $\frac{1}{8}$, on aura pour la pro
demandée

3 3 1 1 1 9

s simples, le nombre des événe-
s composés se trouverait considé-
ement réduit dans les épreuves
tées. Ainsi, pour une épreuve,
'aurait que deux événemens pos-
s.

ıns deux épreuves répétées, l'évé-
ent A pourrait arriver deux fois de
, ou n'arriver qu'une fois, ou ne
: arriver du tout, comme il suit :

AA, AB, BB.
BA.

ıns trois épreuves répétées, l'évé-
ent A peut arriver 3 fois, 2 fois,
s ou pas une seule fois :

AAA, AAB, BBA, BBB.
ABA, BAB.
BAA, ABB.

fois :

AAAA, AAAB, AABB, B

AABA, ABAB, B

ABAA, BAAB, B

BAAA, ABBA, A

BBAA.

BABA.

On remarquera que

fait que donner une aut

aux tableaux qui précéda

ÉPREUVES RÉPÉTÉES.	ÉVÉNEMENS.
1.	2 . . 1 + 1
2.	3 . . 2 + 1
3.	4 . . 3 + 1
4.	5 . . 4 + 1
5.	6 . . 5 + 1
6.	7 . . 6 + 1
7.	8 . . 7 + 1
8.	9 . . 8 + 1
9.	10 . . 9 + 1
10.	11 . . 10 + 1

Ainsi, quand on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel se présentent les événemens simples, le nombre des événemens possibles est égal au nombre des épreuves répétées plus 1.

Ex. Si l'on demande la probabilité [illegible]ans une urne qui contient une

boule blanche et deux fois u
noire, sans préciser l'ordre de l
et en ayant la précaution de
chaque fois la boule tirée, on v
le tableau de la page 52, que
nement peut arriver de six n
il faudra donc prendre 6 fois
bilité qu'un de ces événemens
c'est-à-dire $6 \times \frac{4}{81}$ ou bien $\frac{24}{81}$
babilité contraire est $\frac{57}{81}$.

On peut réunir en sa fa
sieurs probabilités différent
si, dans l'exemple précédent

avons calculée, plus les probabilités de prendre quatre ou trois boules blanches.

Ces sortes de calculs deviennent excessivement simples par l'emploi de l'algèbre. Il est un cas dans lequel le calcul numérique se simplifie beaucoup; c'est quand on demande la probabilité qu'un événement désigné arrivera au moins une fois dans un nombre donné d'épreuves répétées. Comme on aurait seulement contre soi la probabilité que l'événement attendu n'arriverait pas du tout; on calculerait cette probabilité et on la retrancherait de l'unité.

Ex. On demande la probabilité de jeter l'*as* au moins une fois avec un dé à [illegible] faces, et dans trois épreuves ré-

jeter l'*as* trois fois de suite, est $\frac{5}{6}$ ×

ou bien $\frac{125}{216}$. Comme c'est la seul
babilité que l'on ait contre soi,
retranchant de 1, on aura la prob
de l'événement qu'on espère; sa
sera $\frac{92}{216}$, c'est-à-dire un peu m
qu'un demi.

Questions.

Que nommez-vous épreuves rép
Comment calcule-t-on la prob

mbien y a-t-il d'événemens possi-
lans la répétition de deux, de trois
 quatre épreuves, quand on con-
 l'ordre de succession ?
mbien y a-t-il d'événemens pos-
 dans la répétition d'un nombre
onque d'épreuves, quand on con-
e l'ordre de succession ?
laircissez ce qui précède par un
ple ?
mbien y a-t-il d'événemens possi-
dans la répétition de deux, trois
e quatre épreuves, quand on ne
dère pas l'ordre de succession ?
mbien y a-t-il d'événemens possi-
dans la répétition d'un nombre
onque d'épreuves, quand on ne
idère pas l'ordre de succession ?

qu'un événement désig
moins une fois dans un
d'épreuves.

VIe LEÇON.

ıuelques cas particuliers du calcul la probabilite mathématique.

ıous occupant des épreuves répé-, nous avons supposé que le nom-les chances demeurait le même à ue nouvelle épreuve ; mais cette ınstance peut ne pas avoir lieu.

ᴇᴍᴘʟᴇ. Quelle est la probabilité , dans deux épreuves, on prendra figure dans un jeu de 32 cartes, si ne remet pas la carte tirée la pre-'e fois ; on peut gagner de deux ma-es, soit en prenant une figure à la pre-

te de prendre une figure au pre
ge est $\frac{12}{32}$ ou $\frac{3}{8}$. Quant au secon
devient inutile, si l'on gagn
mier ; il n'est donc pas certa
doive le faire, et sa proba
$\frac{5}{8}$, c'est-à-dire qu'elle est é
probabilité qu'on ne réussira
premier tirage. Mais si ce se
rage a lieu, il doit se faire su
tes dont 12 sont favorables
attente ; la probabilité de pren
figure serait donc $\frac{12}{31}$, si l'on
regarder le tirage comme certa
est $\frac{5}{8}$. $\frac{12}{31}$, puisqu'il n'a que

robabilité égale à $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{12}{31}$.
: urne renferme deux boules
ıes et deux boules noires, et deux
's A et B conviennent que celui
ux qui, les yeux bandés, tirera
mier une boule blanche, gagnera.
vent tirer alternativement, et A
ommencer. On demande la pro-
:é que chacun a en sa faveur, en
sant qu'on ne remette pas les
tirées? Au premier tirage, la pro-
:é de prendre une boule blan-
st $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Le second tirage
ɔas certain, il a pour probabilité
:st-à-dire la probabilité que le
A prendra une boule noire la
ère fois: si le second tirage a
comme il reste dans l'urne deux

sera $\frac{1}{3}$, et dans le cas qu

elle sera $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$, parce
cond tirage est douteux. l
lité de la sortie de la boule
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{6}$; c'est aussi la
du troisième tirage. Mais ce
troisième fois, l'urne ne c
des boules blanches, on a
d'en prendre une ; il faudra
tiplier 1 par $\frac{1}{6}$ la probabi
le troisième tirage. Ainsi
a pour lui la probabilité

le second joueur a la proba

Voici un autre exemple qui pourrait offrir quelque difficulté. On place, devant une personne, deux urnes dont l'une contient 2 boules blanches et 5 noires, l'autre contient 3 boules blanches et une noire; quelle est la probabilité de prendre une boule blanche dans l'une de ces urnes? La probabilité que la personne qui doit faire le tirage prendra une boule blanche dans la première urne, dépend de deux événemens, du choix de l'urne et du tirage. Or, la probabilité que la première urne sera choisie est $\frac{1}{2}$, et la probabilité qu'on y prendra une boule blanche est $\frac{2}{7}$; la probabilité de prendre une boule blanche dans la première urne sera donc $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}$ ou $\frac{1}{7}$. La probabilité de pren-

la probabilité de prend
blanche dans l'une ou l'au
urnes, sera $\frac{1}{7} + \frac{3}{8}$.

Nous finirons par un
prouvera combien on doit
dans le calcul des probal
les premiers aperçus. O
généralement qu'en prena
dans une urne renferma
nombre de boules, il est i
parier qu'on en tirera un
ou un nombre impair. C
pariant pour le nombre i
toujours une chance de

ıait qu'une boule, il n'y aurait qu'une hance, et elle serait favorable à celui ui aurait parié pour le nombre impair. i l'urne renfermait deux boules *a* et *b*, n pourrait faire les trois tirages suivans :

a, *b*, *ab* ;

es deux premiers tirages sont impairs, e troisième est pair. Si l'urne renferıait trois boules *a*, *b* et *c*, on pourait faire les sept tirages :

a, *b*, *c*, *abc*, *ab*, *ac*, *bc* ;

es quatre premiers tirages sont impairs, es trois derniers sont pairs. Si l'urne enfermait quatre boules *a*, *b*, *c* et *d*, n pourrait faire les quinze tirages :

a, *b*, *c*, *d*, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd* ;
ab, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, *abcd*.

Les huit premiers tirages sont impairs, es sept autres sont pairs. En général

Nombre des boules.	Un nombre impa
1	1 .
2	$\frac{2}{3}$.
3	$\frac{4}{7}$.
4	$\frac{8}{15}$.
5	$\frac{16}{31}$.
6	$\frac{32}{63}$.
7	$\frac{64}{127}$.
8	$\frac{128}{255}$.

On pourra conclure facilement par induction comment il faudrait continuer ce tableau ; car, dans la probabilité mathématique de tirer un nombre impair, le numérateur de chaque fraction est égal au double du numérateur de la fraction précédente ; le dénominateur vaut le double du numérateur diminué d'une unité.

Questions.

Comment faut-il calculer la probabilité dans des épreuves successives, quand on ne remet pas chaque fois au jeu les cartes que l'on avait tirées ?

Donnez des exemples du calcul de semblables probabilités ?

Comment calcule-t-on la probabilité

urnes qui renfermen
différentes couleurs ?

Quand on prend au
urne renfermant un ce
boules, est-il plus pro
prendra un nombre imp
bre pair?

Quelles sont les pro
les tirages pairs et pour
pairs

VIIe LEÇON.

ır la manière dont il faut envisager le calcul des probabilités.

)UAND on veut faire des applications
u calcul conjectural, il devient inté-
ıssant de rechercher comment les ré-
ıltats du calcul s'accordent avec ceux
e l'expérience. Cette recherche a beau-
ıup occupé les géomètres, et particu-
èrement *J. Bernouilli.* Nous nous con-
nterons de faire connaître ici les con-
usions auxquelles ils ont été conduits.
Si l'on ne fait qu'une seule épreuve,

joueurs pour l'arrivée de l'événemen
attendu, que deux probabilités,
l'expérience fixe leur sort.

EXEMPLE. En jetant un dé à six face
on espère amener l'*as*; on aura, par
calcul, pour probabilité de cet évé
ment $\frac{1}{6}$ et pour probabilité contraire
Cependant, quand l'expérience aura
faite, l'état des joueurs ne sera pas
forme aux probabilités calculées, p
que l'un aura gagné et que l'au
aura perdu.

un très-grand nombre d'épreu-
cord tend à s'établir de plus
ɜntre le calcul et l'expérience.
. pouvait faire un nombre infini
'es, les événemens seraient,
ılement, distribués comme le
indique; dans tout autre cir-
ce, il y a seulement probabilité
accord existera, et cette pro-
croît en même temps que le
des épreuves augmente.
ɪrnouilli a trouvé qu'*en multi-*
:onvenablement le nombre des
s, on peut atteindre à une pro-
aussi voisine de l'unité qu'on
, que le rapport du nombre des
ons d'un événement, au nombre
euves, sera renfermé dans les

aux chances d'un hasard qu'or
tenter un très-grand nombre (

Ex. Les personnes qui jouer
terie sont dans le cas dont no
de parler; le gouvernement
traire, en laissant jouer un t
nombre de fois, doit s'attend
ver que les résultats des épre
cordent toujours bien avec
culs; aussi, comme nous l
plus loin, le bénéfice qu'

robabilité d'un événement sur-
, il y a lieu de croire que cet
ıt arrivera, plutôt que de croire
rrivera pas.
ette probabilité augmente, plus
de croire augmente.
!t proportionnellement à cette
ité.
ɔuve aussi que, dans un nom-
lconque d'épreuves, le plus
: des événemens composés est
chaque événement simple se
·épété proportionnellement à
bilité.
a prenant, par des épreuves ré-
plusieurs cartes d'un jeu, la
on la plus probable des événe-
t celle où les figures et les au-

ıt pas
ıs la prc
rapport
hacun
$\text{:t}\ \frac{20}{32}.$
; chanc
d'une é
nstruct
, que
r, les
avoir
'énemen
: ce p
sonnes
, en ex

:uves ré
ıce ma

›n de certaines chances, il y
penser que la constitution de
ent, ou l'habitude de celui
›loie, déterminent cette fré-

en jetant plusieurs fois un dé
s, l'*as* se présente plus fré-
ıt qu'il ne devrait arriver
ı probabilité de sa sortie, on
nser que le dé est pipé. Si au
›ix et *pile*, *croix* arrive plus
ue *pile*, nous serons portés à
e dans la constitution de la
xiste une cause constante qui
: retour de *croix*. Ainsi, com-
ve M. de Laplace, dans la con-
ı vie, le bonheur constant est
re d'habileté, qui doit faire

Nous avons oui racon...
dant la première guerre d'Espagne, u
corps d'armée français qui faisait l
siége d'une ville, redoutait l'arrivée d
vendredi comme celle d'un jour fatal
parce que l'ennemi tuait ou blessai
alors généralement plus de monde q
les autres jours de la semaine ; il s'ét
donc établi un fort préjugé contre
vendredi. Or, on apprit, après le sié
que les artilleurs qui étaient chargé
nourrir le feu changeaient chaque j

encore; dans l'impossibilité où nous sommes de connaître la vraie cause des événemens, nous l'attribuons à des objets absolument étrangers, tant il nous répugne de croire à des effets sans cause!

Questions.

Peut-il y avoir concordance entre le calcul et l'expérience quand on ne fait qu'une épreuve?

La concordance a-t-elle lieu pour un nombre infini d'épreuves?

Peut-on assigner le nombre d'épreuves convenable pour que les résultats du calcul s'approchent autant qu'on voudra des résultats de l'expérience?

Est-il prudent de s'exposer aux chan-

Quels sont les trois principe
quels il faut avoir égard dans l
des probabilités?

Quel est le plus probable des
mens composés dans un nomb
conque d'épreuves répétées?

Les événemens passés ont-
qu'influence sur les événemens

Si, après des épreuves répé
aperçoit une fréquence marq
l'apparition de certaines chan
faut-il en conclure?

Citez quelques exemples.

VIIIe LEÇON.

De l'espérance mathématique.

Il convient que deux joueurs soient placés dans une position telle qu'aucun d'eux n'ait l'avantage sur l'autre; ainsi, quand deux personnes font un pari ou jouent ensemble, et qu'elles ont chacune en leur faveur, une même probabilité de gagner, on conçoit que la justice exige qu'elles exposent des sommes égales.

Exemple. Au jeu de *pile* ou *croix*, les deux joueurs sont exactement dans la

en sa faveur; puisqu'il n'existe pas
motif de préférence, ces joueurs d
vent courir les mêmes risques et ex
ser la même somme. Si une urne c
tenait vingt boules blanches et vi
boules noires, et s'il s'agissait d'en
traire une boule d'une couleur d
gnée, la probabilité de gagner p
chacun des joueurs serait $\frac{1}{2}$; se t
vant ainsi dans la même positi
ces joueurs devraient aussi couri
mêmes risques. Dans le jet d'un
six faces, six personnes pariant cha
d'une face différ

ment avantageuse et ont chacune
: probabilité de gagner.

*les probabilités de gagner ne sont
es mêmes, les joueurs doivent ex-
des sommes proportionnelles à ces
abilités.*

. S'il s'agit de jeter l'*as* avec un dé
faces, le parieur doit exposer le
ıième de ce qu'expose l'autre
ır; il n'a en effet qu'une seule
ce pour lui, tandis que l'autre en
ı. Pour mieux s'expliquer la chose,
ourrait supposer, comme dans
nple précédent, six joueurs qui ex-
ıt chacun la même somme en pa-
pour une face différente; il y au-
lonc six sommes égales exposées;
il devient indifférent au premier

ıne se s
rvu qu'e
qu'expo

. ordinai
er, et l'
ıne figu
contrai
poser p(
.a proba
st $\frac{12}{32}$ ou
dre $\frac{5}{8}$;
tre dans
probab
it chan
ınt chac
es, ou $\frac{1}{8}$
levront

poser chacun la même somme, 1 florin par exemple; mais une personne peut se substituer à trois de ces joueurs en payant leurs mises, et une seconde personne peut se substituer aux cinq autres joueurs, en payant également leurs mises; la première devrait donc donner trois florins et la seconde cinq florins. Ces sommes sont justement dans le rapport des chances et des probabilités que les deux joueurs ont de gagner.

On nomme espérance mathématique produit d'une somme qu'on espère r la probabilité qu'on a de l'obtenir.

Ex. On parie de prendre du premier p une figure dans un jeu de trente-x cartes, et l'on expose trois flo-, celui qui parierait le contraire

l'espérance mathématique d
joueur serait le produit de c
qu'il espère par la probabili
de l'obtenir, ou 1,87 florir
rance mathématique du sec
serait trois florins multipli
1,87 florins également.

*Il faut, dans tout pari équ
les espérances mathématiqu
joueurs soient égales*, co
l'exemple quiprécède.

Quand les espérances mat
ne sont pas égales, mais

grand nombre d'épreuves, car le joueur favorisé sera toujours en gain et l'autre toujours en perte. Ainsi, comme nous le verrons bientôt, l'espérance mathématique aux loteries est plus forte pour le gouvernement que celle des joueurs; aussi le gouvernement retire un bénéfice assuré sur le grand nombre de tirages qui se font.

Questions.

Quand les probabilités de gagner sont les mêmes, comment convient-il de parier?

Quand les probabilités de gagner ne sont pas les mêmes, comment doivent se comporter les joueurs?

Qu'est-ce que l'espérance mathéma-

espéra...

pari équitable?

Quand les espérances ques ne sont pas égales, position des joueurs?

—

IXe LEÇON.

De l'espérance morale.

évaluant les *espérances mathé-*
ues des joueurs, nous avons dit ce
convenait de faire en toute jus-
sans avoir égard à la position re-
des joueurs. Nous avons réglé
ises comme le ferait un tribunal;
comme conseillers, comme amis,
devrions considérer sous un autre
de vue, le jeu même réglé d'après
us strictes lois de l'équité.

importe de considérer qu'une
e somme acquiert plus d'impor-

un jeu où les ch
deux côtés. Ce p
ble, d'après ce q
cédemment ; ma
de cette manière
gagne annuellem
nécessaire pour
serons en droit
privations qu'il d
de perte, peuvent
avec les avantage
de gain ; nous lui
qu'il expose doit

est peut-être beaucoup moins importante pour l'autre joueur qui possède des biens considérables et qui sera peu dérangé en cas de perte. Ainsi nous sentons que, quoique les conditions soient équitables, les positions des joueurs sont cependant ici bien différentes.

L'importance d'une somme doit dépendre du bien que nous possédons. En effet, 1 florin a une importance bien plus considérable pour une personne qui ne possède que 100 florins que pour une autre qui en possède 100,000.

On estime l'importance d'une somme en divisant cette somme par le bien que possède la personne qui l'expose. La fraction obtenue de cette manière se

qui en exposerait 1000, .
de son avoir; c'est-à-dire ·
aussi importante pour lui qu
50,000 florins pour une p
en possède 100,000.

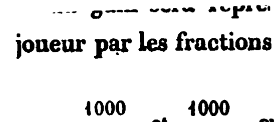
D'après cette manière
l'importance d'une somme
se faire une idée plus juste
tion d'un joueur, en suppo
qu'on observe les princi
dans les espérances ma
Concevons un joueur q
2000 florins, en expose
les chanc

sentée par $\frac{1}{2}$, d'après ce qui précède; mais s'il gagne, il aura 3000 florins et conséquemment son gain n'aura qu'une importance représentée par $\frac{1}{3}$. Ce qu'il expose et ce qu'il espère se trouvent ainsi représentés par les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$: la différence des ces fractions, ou $\frac{1}{6}$, est la diminution de la *valeur morale* que ce jeu fait éprouver à sa fortune. En faisant le calcul, on trouve :

$\frac{1}{2}$ de 2000 fl. = 1000 fl. somme exposée.
$\frac{1}{3}$ — — fl. = 666,66 — espérée.

$\frac{1}{6}$ — — fl. = 333,33 diminution.

Supposons encore que, dans l'exem-



joueur par les fractions

$$\frac{1000}{100000} \text{ et } \frac{1000}{101000}, \text{ ou}$$

et la diminution de la va
sa fortune sera la diff
deux dernières fraction
de 100,000 = 9,9, flo
tions des deux joueurs c
dérons, sont donc bien

Il est facile de voir p
précédens que tout jeu c
lorsqu'on joue de la ma

fortune. Cette diminution peut devenir à la vérité presque insensible quand on n'expose que de très-petites sommes, relativement à ce que l'on possède. La prudence doit donc nous mettre en garde contre les jeux qui se présentent même sous les formes les plus équitables; cette règle que nous indique le bon sens se trouve ici justifiée par le calcul.

Il peut se présenter une difficulté dans la manière d'apprécier l'importance d'une somme pour un individu qui actuellement ne possède rien. Mais comme on l'a remarqué, le bien possédé par un individu est au moins représenté par la substance qu'il tire de l'emploi de sa force et de son industrie, et ne s'anéantit qu'avec sa vie. Il n'y a que

de 10 pièces d'or, dit *Bernouilli*,
accepterait pas 50 sous la conditio
renoncer à ce moyen de gagner sa
aussi bien qu'à tout autre. Il en
ainsi de ceux qui ne vivent qu'en
pruntant. Pourraient-ils s'interdir
jamais cette ressource, moyennant
somme plus considérable même
celle qui les libérerait de leurs det
si donc le mendiant et l'emprunteu
veulent pas renoncer à cette sort

èces, et l'autre de 1000, quoique ns le langage ordinaire on dise que un n'a rien et l'autre moins que rien ».

On nomme espérance morale le produit de la valeur morale d'une somme ar la probabilité qu'on a de l'obtenir. insi dans l'exemple des deux joueurs ue nous avons cité plus haut, les probabilités de gagner étaient toutes deux gales à $\frac{1}{2}$; et les valeurs morales des ommes espérées étaient $\frac{1000}{3000}$ pour le remier joueur et $\frac{1000}{101000}$ pour le second joueur ; ce qui donnait, pour les spérances morales :

$\frac{1000}{6000}$ de sa fortune, au 1[er] joueur.

$\frac{1000}{202000}$ — — — 2[e] joueur.

$\frac{1}{202}$ de 100,000 fl. = 49

En calculant les espe
matiques au lieu des es
les , on aurait obtenu 5
chacun des joueurs. On
sultats précédens, que l
ont du désavantage à
gent, mais le désavanta
plus considérable pou
pour le second, qui pos
plus grande.

Questio

Une somme a-t-elle la même importance soit qu'on la gagne soit qu'on la perde ?

De quoi dépend l'importance d'une somme ?

Comment estimez-vous l'importance d'une somme ?

Qu'est-ce que la *valeur morale* d'une somme ?

Comment calcule-t-on la diminution de la valenr morale, que le jeu, même le plus équitable, fait subir à une fortune ?

Un jeu équitable quel qu'il soit, peut-il produire de l'avantage aux joueurs ?

Que nous ordonne la prudence à l'égard des jeux de hasard ?

Ne peut-on pas éprouver de difficulté

Donnez un exemple du ca
l'espérance morale ?

Xe LEÇON.

Des loteries.

'AVANTAGE du banquier au jeu des
eries, consiste en ce que son espé-
ace mathématique est généralement
aucoup plus forte que celle des
ieurs ; et en ce qu'il s'assure la jouis-
çe de cet avantage par le grand
abre de tirages qui ont lieu. Nous
ierons de faire comprendre ceci,
l'examen de la loterie gênoise et de
terie qui vient d'être établie dans
yaume (*).

'usage des loteries modernes nous vient
; Gênes en fut le berceau, et cette répu-

lieu.

L'extrait simple.

somme quelconque

signé, et si ce num

qu'amène le tirage,

valeur de la mise.

blique dut cette inventio

vernement : voici quelle

On faisait à Gênes, tous

de cinq sénateurs pour

charges des magistrature

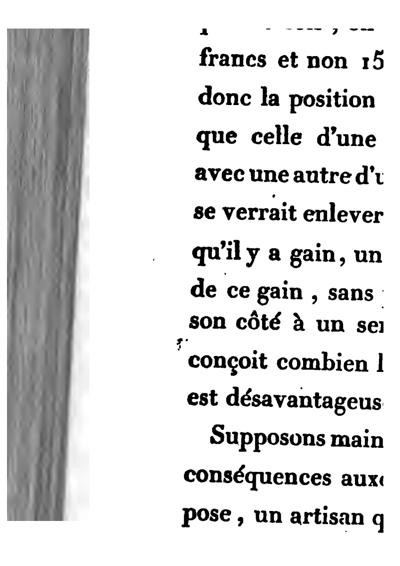
élection en mettant dans

tous ceux qui aspiraient

pérance mathématique du joueur
it la somme qu'il expose. La loterie
composant de 90 numéros, il y a 90
ances en tout, sur lesquelles 5 sont
orables au joueur. La probabilité
e le numéro du joueur sera l'un des
q qu'amène le tirage, est donc re-
sentée par la fraction $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. Si
nise est 100 francs; pour que le jeu
t équitable, on doit en cas de gain,

it de l'urne, le même esprit d'imitation fit
m limita chaque tirage à 5 numéros heureux.
'inventeur de ce système de loterie est *Bene-*
o Gentile, citoyen Gênois. C'est d'après cette
ne que fut établie en France, en 1758, la
rie de l'école royale militaire; elle fut sup-
née en 1776 et recréée la même année sous
itre de loterie royale de France (*Parisot*,
ité du calcul conjectural).

9.



francs et non 15
donc la position
que celle d'une
avec une autre d'ı
se verrait enlever
qu'il y a gain, un
de ce gain, sans
son côté à un seı
conçoit combien l
est désavantageus

Supposons main
conséquences aux
pose, un artisan q

d'en espérer? nous venons de voir que pour 18 francs, il ne doit plus en prétendre que 15; ainsi au lieu de 100 francs, il ne doit espérer que $\frac{15}{18}$ de 100 ou 83fr., 33, qui est son espérance mathématique ; il aurait donc éprouvé une perte de plus de 16 francs ; c'est une espèce d'impôt qu'il paie pour avoir le plaisir de jouer. Nous ajouterons à ces considérations que nous n'avons pas fait entrer en ligne de compte la diminution de la valeur morale que la fortune du joueur éprouve par le jeu, pour donner un exemple du calcul qu'il faudrait faire dans l'hypothèse précédente : supposons que ce même artisan qui expose 100 francs, ne possède en tout que 1000 francs; nous aurons, pour



1000

et pour celle de la

83,3

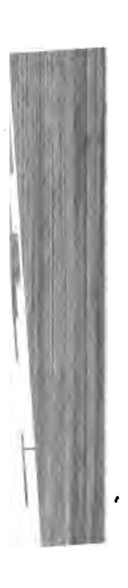
1083,3

la diminution de
de la fortune de l

$\frac{1}{10} - \frac{1}{13}$ ou bien $\frac{3}{13}$
viron 23fr., 26. Ai
paie 100 francs pou
vaut que 83, 33, é
la valeur morale d
diminution de 23fr.

On demandera san

ous allons les faire connaître.
ıit *déterminé*. On met une
quelconque sur un numéro et
gne de plus l'ordre de la sortie.
ici qu'une seule chance sur 90;
ıit donc, en stricte justice, re-
o fois sa mise; on ne la reçoit
'ois. En exposant 10 francs, il
en cas de gain, recevoir 900 fr.,
reçoit que 700 : les autres 200
eviennent la part du banquier.
On expose une somme sur deux
désignés, et dans le cas de
reçoit 270 fois sa mise. Or, le
ontre qu'on peut disposer 90
, deux à deux, de 8010 maniè-
entes; il y a donc 8010 chan-
n n'en a que 20 en sa faveur,



différens de 2 num
de gagner est don
faudrait recevoir po
pose 400 fr. 50 c.; on
Ambe déterminée
numéros et l'on indi
sortie. On n'a qu'u
sa faveur sur 8010
recevoir, en cas de
mise ; on ne la reçoit
sor retient donc à
ce qui revient au jou
Terne. Le terne es

; et avec les 5 numéros sortans
ut en faire 60 ; le joueur a donc
ances sur 704880 : sa probabilité
gner étant $\frac{1}{11748}$, il devrait rece-
11748 fois sa mise s'il gagnait ; il
reçoit que 5500 fois. Ainsi, en
gain, il partage son bénéfice avec
sor qui en prend plus de la moitié.
aterne. Le quaterne est formé par
rtie de quatre numéros désignés.
lcul montre qu'avec 90 numéros,
eut faire 61,324,560 arrangemens
ens de quatre numéros, et avec
numéros que fournit le tirage on
peut former que 120. On a donc
hances sur 61,324,560, et la pro-
ité de gagner est $\frac{1}{511038}$. En ga-
t, on devrait donc recevoir 511,038

sition du joueur ...

sant de côté la considérati

ment que produit toujours

se trouve dans la même pos

l'on jouait avec une perso

vous donnerait aucun dédo

en cas de perte ; et qui, en

prélèverait toujours enviro

bénéfice. On ne manquera

récrier contre une pareil

telle est cependant la positi

qui met sur un quaterne ; s

seule peut l'excuser.

On ne joue point le *tern*

ie de 5 numéros désignés. Le trésor,
cas de gain, prélevait alors plus des
du bénéfice du joueur.

Quoique la loterie génoise soit dé-
due dans ce royaume, on sera peut-
e charmé de connaître quelle est la
ritable valeur d'un billet de 100 francs
is à la loterie. Voici un tableau de
s valeurs, abstraction faite de la di-
nution de la valeur morale qu'é-
ouve la fortune du joueur :

	Somme exposée.	Valeur de la somme exposée.
trait	100	83,33
trait déterminé .	100	77,77
be	100	67,50
be déterminé .	100	63,67
ne	100	46,82
terne	100	14,68

dire ce que vau...
100 francs pris à la loterie.

Plus il y a de chances, les autres constances étant d'ailleurs les mêm et plus la concordance entre les r tats du calcul et de l'expérience de difficile, comme nous l'avons vu ; c pliquera donc facilement pourqu trésor, qui cherche à assurer ses tages, prélève des bénéfices plus dérables pour les événemens qui dent d'un plus grand nombre de ch

Les bénéfices que retire un g ... de l'institution des loteri

d'une autre espèce : pour s'en con-
cre, on pourra jeter les yeux sur le
ɜau suivant, qui indique les sommes
la lotèrie de Paris a mises en circu-
ɩn pendant 7 années (*).

	SOMMES		
ɪ.	VERSÉES dans LES BUREAUX.	REÇUES par LES GAGNANS.	ENTRÉES au TRÉSOR.
. .	19,552,000	13,383,000	6,169,000
. .	21,461,000	16,513,000	4,948,000
. .	29,371,000	22,765,000	6,606,000
. .	27,524,000	22,306,000	5,218,000
. .	29,036,000	19,783,000	9,253,000
:. .	126,944,000	94,750,000	32,194,000
ne.	25,388,000	19,950,000	6,438,800

Recherches statistiques sur Paris.

les bureaux.

La nouvelle loterie qui vient
établie dans les Pays-Bas, est org
de manière à présenter au trés
bénéfice certain. Cette loterie com
50,000 billets de la valeur de 46 f
chacun; la somme des mises
donc à 2,300,000 florins. Or,
somme se réduit à 2,000,000,
observe que les collecteurs pr
6 florins par billet. On dispo
des 2,000,000 florins restans d
nière suivante : on fait une re
à chacun de 5000

numéros que produit le second tirage ; e reste de la somme est partagé en primes et en prix sur lesquels le trésor prélève un tantième. Ainsi, l'on a

5000 fois 35 florins	175,000
— — 20 florins	100,000
Prix et primes.	1,725,000
En tout	2,000,000

La somme de 1,725,000 florins sert à ormer 1000 prix qui valent ensemble 9,000 florins ; 49,000 primes qui valent 1,03[illegible]00 fl., de sorte que chaque eur ait un prix ou une prime ; de s six primes extraordinaires s'élevant 2,100 florins. Or, le bénéfice du r consiste dans les 15 pour cent prélève sur les prix et les primes

extraordinaires, et dans ...
cent qu'il prélève sur les p
sorte que, pour les joueurs,
des prix et des primes sont
ment

	VALEUR RÉELLE.	PA
1000 prix (*) . .	fl. 568,650	
49000 primes . .	930,510	
6 primes extra.	18,785	
	1,517,94	

Si nous récapitulons c
... égard à ce qu

trouve répartie de la manière suivante :

Pour les joueurs . . .	fl.	1,792,945
Pour le trésor	—	207,055
Pour les collecteurs. . . .	—	300,000
		2,300,000

Cherchons maintenant quelle est la véritable valeur du billet que l'on paie 46 florins. Puisque chaque porteur d'un billet a le même droit sur la somme de 1,792,945 florins, il lui en reviendrait la 50,000ième partie, si l'on convenait de partager avec équité au lieu de faire le tirage : or, sa part ou son espérance mathématique ne serait alors que de 35,86 florins. Le joueur paie donc 46 florins ce qui dans le fait ne vaut pas 35,86 florins. La perte que le joueur fait sur

les collecteurs ainsi qu'il suit

fl.	35,86	part qui revient au jo
—	4,14	— — au tr
—	6	— — aux c
	46	prix d'un billet de lote

La perte de chaque joueur i
lement s'élève à plus de 22 p
Nous n'avons pas pris en con
que l'on paie encore extraordi
2 florins pour chacun des 25
classicaux qu'on achète p
ce qui ajoute 50,000 florins
... et des collecteurs

ıt assimiler le billet de la loterie à
e marchandise qui aurait une valeur
trinsèque de 35,86 florins, et que
n vendrait 46 florins, et 48 en détail.

Questions.

Quel est l'avantage du banquier au
a des loteries ?

Qu'est-ce que la loterie génoise ?

Qu'est-ce que l'extrait simple ?

Combien perd-on par cent en jouant
extrait simple ?

Donnez un exemple des pertes qu'é-
rouve un individu peu fortuné, qui
ue sur l'extrait simple ?

Qu'est-ce que l'extrait déterminé ?

Qu'est-ce que l'ambe ?

Qu'est-ce que l'ambe déterminé ?

Faites sentir le désavantage c
rable du joueur qui met sur u
terne ?

Quelle est la perte sur 100 q
le joueur en mettant sur un extr
ambe, un terne, etc.

Pourquoi le bénéfice du trés
plus considérable sur les quater
sur les extraits ou les ambes?

Le gouvernement peut-il
sur le bénéfice des loteries ?

Quel est le bénéfice moy
loterie de Paris ?

est le bénéfice du trésor?

e est la part qui revient aux
et comment se trouve-t-elle

?

e est la véritable valeur du bil-
'on paie 46 florins ?

ient faut-il concevoir que les
s, valeur du billet, se trouvent
entre le joueur, le trésor et
ecteurs?

ien le joueur perd-il sur 100?
ient faut-il envisager la posi-
joueur ?

Du calcul de la prol
ne connaît pas le n
favorables.

Nous avons toujour
qui précède, qu'on
toutes les chances fav
mens dont nous chei
bilités ainsi que les
bles. Nous allons noi
où ces circonstance:

upposons qu'une urne renferme
x boules, et qu'on ignore leur cou-
. On extrait une de ces boules
on remet ensuite pour procéder à
second tirage; mais on amène une
onde fois une boule blanche et l'on
nande quelle est la couleur des
les renfermées dans l'urne. On ne
t faire ici que deux *hypothèses* : ou
deux boules sont blanches ou l'une
ement est blanche, l'autre étant
ne couleur quelconque, rouge par
mple. On sent que ces deux hypo-
ses ne sont que probables, et l'on
nande de déterminer leurs probabi-
s relatives. La théorie indique qu'il
: opérer de la manière suivante. On
ule la probabilité de l'événement

que l'on peu...

que l'on obtient sont propor
probabilités de ces hypoth
dans notre première hyp
deux boules étant blanche
titude qu'on prendra à ch
une boule blanche, le nom
est donc 1. Dans la sec
thèse, l'une des deux
blanche, l'on a pour pr
sortie $\frac{1}{2}$ et pour probal
sorties successives $\frac{1}{2}$
obtient donc les nom
... et la probabilit

probabilités de ces deux hypothèses; conséquemment la probabilité de l'hypothèse de deux boules blanches est à la probabilité de l'hypothèse d'une seule boule blanche, comme 1 est à $\frac{1}{4}$ ou comme 4 est à 1.

On énonce le principe précédent en disant que *les probabilités des hypothèses (ou des causes des événemens) sont proportionnelles aux probabilités que donnent ces hypothèses pour les événemens observés.*

En soutenant dans un pari la première hypothèse, on doit se considérer comme ayant pour soi 4 chances sur 5; en d'autres termes, les probabilités des deux hypothèses sont $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{5}$.

Supposons maintenant que l'on de-

prendre encore ur
un troisième tirag
dérer les deux hyp
demment comme c
desquelles on doit
blanche ; le problè
aux brobabilités co
lera ainsi qu'il suit.
première hypothèse
multiplier par la p
nement dans cette
avons ici la certitud
blanche, ainsi il fau
ou $\frac{4}{..}$. La probabilit

hypothèse ; le produit de ces nombres est $\frac{1}{10}$. La probabilité de prendre une troisième fois une boule blanche sera donc $\frac{4}{5}$ plus $\frac{1}{10}$ ou $\frac{9}{10}$.

On réduit ce qui précède au principe suivant : *la probabilité d'un nouvel événement simple s'obtient en calculant, d'après les événemens passés, les probabilités des diverses hypothèses possibles et faisant la somme des produits de ces probabilités par celles de l'événement, prises dans chaque hypothèse.*

Questions.

Quel est l'objet de cette leçon ?

Comment calcule-t-on les probabilités des causes des événemens ?

Comment calcule-t-on l

d'un nouvel événement d'a

nemens passés ?

Quelle est la règle géné

XIIe LEÇON.

ul de la probabilité, quand le
re des chances est inconnu.

ipposons dans ce qui va suivre
ne connaît ni le nombre des
favorables à un événement, ni
re total des chances; on con-
ement les résultats de plusieurs
ices, et l'on veut calculer par
yen la probabilité de l'événe-
La solution de cette question
ssante pour toutes les sciences
ration, se rattache à des calculs

Commençons par examin
un événement est arrivé d
nombre quelconque de fois
indique que *la probabilité*
ment se reproduira encore
vante, est égale au nomb
de l'unité, divisé par le n
augmenté de deux unités.

Exemples. On a décou
présent 11 planètes qui tou
dans le même sens auto
on demande quelle est l
que si l'on découvrait

mément au principe énoncé précédemment, diviser 11 plus 1, par 11 plus 2, et l'on aura pour la probabilité demandée $\frac{12}{13}$.

On demande quelle est la probabilité que le soleil reparaîtra demain sur l'horizon ? Si nous ne tenons compte que du nombre de fois que nous avons vu le phénomène se réproduire successivement, en faisant abstraction des autres motifs que nous avons de croire à son retour, nous calculerons de la manière suivante : Au 1er janvier 1827, on avait compté 5831 ans, ou 2,128,315 retours successifs du soleil depuis la création, que nous ferons remonter à 4004 ans avant l'ère chrétienne; la probabilité d'un nouveau retour du soleil sur l'ho-

contre 1 que le phénomè
fectivement lieu.

On a été dans le cas
assertions d'une même p
en a successivement r
tesse ; on demande que
bilité qu'une 21ième ass
lement vraie? Il faudr
22 et la probabilité
$\frac{21}{22}$. Ainsi il y a 21 à
qu'une nouvelle asser
cette même personne s
les assertions précéder

moins fortes, de croire au retour de cet événement. On sent qu'il existe une cause qui facilite sa reproduction; or, la théorie offre un moyen très-simple de calculer la probabilité que cette cause existe effectivement. *La probabilité est une fraction qui a pour dénominateur le nombre 2 multiplié autant de fois par lui-même que l'événement a été observé de fois consécutives ; et, pour numérateur, ce même produit moins* 1.

Ex. Quelle est la probabilité qu'il existe pour les planètes, une plus grande facilité de se mouvoir autour du soleil dans une direction plutôt que dans une autre opposée ? On a observé 11 planètes qui se meuvent toutes dans le même sens, la probabilité d'une plus

probabilité de l'événer
ment observé est supé

La probabilité qu'il e:
des retours périodiques
l'horizon est une fractio
tellement de l'unité, qu
sidérer comme une cert
bre qu'on aurait à par
renfermerait plus de
chiffres et ne saurait être
langage ordinaire.

On peut aussi calcul
qu'un événement obse

bilité vaut une fraction qui a, pour numérateur, le nombre d'observations faites plus 1, et pour dénominateur, ce même nombre plus 1, et plus encore le nombre de fois que l'événement doit se reproduire.

Ex. Quelle est la probabilité que, si l'on découvre encore trois planètes, elles marcheront dans le même sens que les 11 autres que nous connaissons? Il faut diviser 11 plus 1 ou 12 par 11 plus 1 plus 3 ou 15; et l'on aura, pour la probabilité demandée, $\frac{12}{15}$ ou $\frac{4}{5}$. Pour la probabilité que le soleil reparaîtra encore 10 fois sur l'horizon, on avait, au 1er janvier 1827, $\frac{2128316}{2128326}$.

On voit que la probabilité irait continuellement en décroissant, à mesure

utiles dans les sciences

On a fait, par exemple

riences qui se sont acco

le même résultat; et l'

que la probabilité qu'

expérience donnera enc

conforme aux précéde

à la probabilité qu'il e

qui favorise les retour

observés, elle est $\frac{31}{32}$.

Nous avons supposé

cède qu'on n'avait obser

d'événements qui s'étaie

produits; dans ce qui

qui se sont reproduits chacun un certain nombre de fois.

Ex. On a tiré d'une urne, dans 20 tirages consécutifs, 17 boules blanches et 3 noires ; et l'on demande la probabilité de prendre au 21ième tirage une boule blanche? il faut dans ce cas diviser le nombre 17 plus 1 ou 18, par le nombre 20 plus 2 ou 22, et l'on a, pour la probabilité de tirer encore une boule blanche au 21ième tirage, $\frac{18}{22}$. De même, pour la probabilité de tirer une boule noire, on a $\frac{4}{22}$, et les deux probabilités réunies valent l'unité ; ce qui suppose que l'urne ne renferme que des boules blanches et des boules noires.

Sur 116 comètes dont les orbites se trouvent calculées dans l'*astronomie*

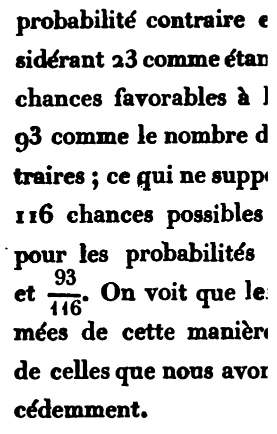
la distance de la te
babilité qu'une no
être rangée dans la
plus 1 ou 24, divi
118; c'est-à-dire la
probabilité contrai
donc 24 contre 94
nement dont il s'ag
tre 4.

En réduisant ce
cipe, on trouve q
servé deux espèce
probabilité qu'un

reproduira encore une fois, est une fraction qui a, pour numérateur, le nombre de fois que l'événement dont il est question a été observé, plus 1; et, pour dénominateur, le nombre total des observations, plus 2.

Les calculs deviennent assez compliqués quand on veut déterminer, dans le cas qui nous occupe, les probabilités composées. Heureusement on trouve que les résultats sont à peu près les mêmes que ceux qu'on obtiendrait en considérant les chances favorables et les chances défavorables comme étant numériquement dans le même rapport que les événemens observés.

Ex. Par les calculs précédens, nous avons vu que $\frac{24}{118}$ est la probabilité



probabilité contraire e
sidérant 23 comme étan
chances favorables à l
93 comme le nombre d
traires ; ce qui ne supp
116 chances possibles
pour les probabilités
et $\frac{93}{116}$. On voit que le
mées de cette maniè
de celles que nous avo
cédemment.

La probabilité qu'on
cessivement deux comè

ayant au contraire sa distance périhé-
lie plus grande, est une probabilité
composée qui se formera du produit
des deux fractions $\frac{23}{116}$ et $\frac{93}{116}$.

Plus on a d'observations et moins il
y a d'erreur à calculer de cette dernière
manière, qui suppose qu'on connaît le
nombre total des chances, et le nombre
des chances favorables. Ces notions
seront développées dans la leçon sui-
vante.

Questions.

Qeul est l'objet de cette leçon?

Comment calculez-vous la probabilité
qu'un événement qu'on a observé plu-
sieurs fois de suite, se reproduira en-
core une fois?

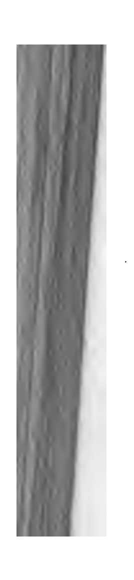
lité qu'il existe une caus
lite la reproduction d'un
qui a été observé plusie
suites?

Appliquez la règle à diff
ples ?

Comment calculez-vou
bilité qu'un événement qu
vé plusieurs fois de suite
duira encore un nombr
fois ?

Faites des applications
aux sciences d'observatio

babilité que l'un de ces événemens
eproduira ?
Peut-on simplifier les calculs dans
exemples précédens ?



XII

De la manière

On est très-so
voir prendre
plusieurs nom
tous ces nomb
somme par leur
la valeur moye
Exemple. Si

'hommes, dans les conditions les plus
iverses, l'âge qu'avait atteint chacun
les décédés; la somme de ces âges, divi-
ée par le nombre des décès, est la durée
noyenne de la vie.

Ils est évident que la valeur moyenne
st connue avec d'autant plus de préci-
ion, que l'on fait concourir à cette
echerche un plus grand nombre d'ob-
ervations ; et l'on voit aussi qu'il est
écessaire de ne point se borner à cer-
aines professions ou conditions, mais
e les admettre toutes indistinctement,
fin que par la multitude et la promis
uité des élémens, les variations acci-
entelles se compensent, et que l'on
rme ainsi un résultat moyen et géné-
il. Nous avons vu en effet que dans un

ce qui est accid
ne reste que l'e
constantes ; ens
hasard pour les
rés en grand no
On peut acqu
vante une conna
la précision d'un
fit, par exempl
parties l'ensembl
dont le nombre e
et de prendre
parties la valeu
car si ces deux v

:ès-précise. Rien n'est plus propre que
e genre d'épreuves à mettre en évi-
.ence l'exactitude des résultats statis-
iques, et il est presqu'inutile de pré-
enter au lecteur des conséquences
[ui ne sont pas vérifiées par des com-
›araisons des valeurs moyennes.

Ex. On suppose qu'une urne contient
ın nombre inconnu de boules blanches
:t un nombre de boules noires également
nconnu, on pourra déterminer par ex-
›érience le rapport inconnu de ces deux
ıombres. Il faut pour cela répéter un
rès-grand nombre d'épreuves, dont cha-
:une consiste à extraire une boule de
'urne proposée, et à l'y replacer après
ıvoir marqué sa couleur. On comptera
combien il est arrivé de fois qu'une bou-

sortie. Le rapport de ces deux
qui sont désignés par m et
d'abord différer beaucoup d
des nombres inconnus M et
quotient variable $\frac{m}{n}$ appro
tinuellement du quotient fi

Ainsi, en supposant que
des épreuves qui ont été fai
grand, et désignant par m e
bres respectifs des boules
noires sorties de l'urne,
$\frac{m}{n}$ différera extrêmement pe
$\frac{M}{N}$. La différence $\frac{M}{N} - \frac{n}{}$

ment petite, et cela arrive nécessaiment.

upposons maintenant qu'après avoir evé le nombre d'épreuves, que nous iquerons par r, on renouvelle une ration du même genre, et que le nbre des épreuves qui forment cette onde opération soit r ou un autre nbre très-grand r'. Le rapport $\frac{m'}{n'}$, nombres respectifs des boules blanes ou noires sorties pendant cette onde opération, diffère aussi extrêment peu du rapport fixe $\frac{M}{N}$: ainsi quantités dont $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ diffèrent enelles et diffèrent de $\frac{M}{N}$, diminuent éfiniment et sans limite à mesure e les nombres r et r' augmentent; st-à-dire que les nombres r et r' des

rence appréciable
déduits de l'une et d
Un des moyens l
vérifier les nombre
des observations mu
comme nous l'avons
tuitement la série d
en diverses parties
valeurs que l'on dé
chacune de ces part
règles suppose évide
position de l'urne r
dant toute la durée

l'on peut même connaître ainsi l'effet de ces changemens ; mais il est nécessaire, dans ce cas, de considérer séparément les intervalles dans lesquels la cause demeure constante, et de multiplier les observations relatives à chacun de ces intervalles. Les sources les plus communes de l'erreur et de l'incertitude des conséquences que plusieurs écrivains déduisent des recherches statistiques, sont 1° l'inexactitude des observations primitives recueillies par des moyens très-divers et non comparables ; 2° le trop petit nombre des observations, ce qui ne permet point de les diviser en séries et de former séparément le résultat de chaque série ; 3° l'altération ou progressive ou irré-

Que

Comment trouv
moyenne de plusie
Qu'est-ce qui con
l'exactitude d'une v
Comment peut-on
titude plus ou moin
leur moyenne? Don
Les valeurs moy
faire reconnaître le
surviennent dans la
des événemens?

XIVe LEÇON.

: *mesure du degré d'approxima-*
ı *d'un résultat moyen, ou règle*
moindres carrés.

·enant un résultat moyen, le de-
pproximation ne dépend pas seu-
: du nombre de quantités qu'on
ies, il dépend encore du plus ou
de diversité de ces quantités. Il s'a-
e former une idée exacte de ce de-
pproximation, et de montrer que
:ision du résultat est une quan-
esurable que l'on peut toujours

pour trouver celle
de la précision.

On commencera
leur moyenne de tou
ticulières que l'on c
dra ensuite le carré
valeurs particulières
une seconde valeur
celle des carrés ; on
manière, pour les deu
nombres que nous d
mier par A et le sec
tranchera de B le ca
et l'on divisera le do

u quotient, on trouvera une quan-
[ue nous désignons par *g*, et qui
ı mesurer le degré d'approxima-
: plus la valeur de *g* est petite,
la moyenne calculée A est voisine
ı valeur exacte que l'on cherche.
:. Nous supposons que l'on a trouvé
ı valeurs particulières, savoir :

	1000	égales	à 2
	2000	—	— 5
et	1000	—	— 12.

général, les quantités observées
toutes inégales, et elles ne se ré-
ent pas, comme les précédentes,
petit nombre de valeurs différen-
mais nous n'avons ici en vue que
liquer la marche du calcul.
ı somme des valeurs observées est

pour la valeur moyenn
représentée par A. La
rés des valeurs est 10
+ 1000. 144 ou 19800
somme par 4000, on
moyenne des carrés q
présentée par B. On e
carré 36, c'est-à-dire
valeur moyenne A,
prend le double de ce
vise 27 par 4000; ensui
cine carrée du quotie
cette racine est $\frac{1}{100}\sqrt{}$

ıction qui fait connaître le degré ıpproximation du résultat moyen. *es précisions respectives de deux ré- ıltats sont en raison inverse des frac- ions obtenues de cette manière.*

On peut dire que le résultat moyen d'un nombre infini d'observations est une quantité fixe, où il n'entre plus rien de contingent, et qui a un rapport certain avec la nature des faits obser- vés. On lui compare chacune des va- leurs particulières, et l'on appelle *er- reur* ou *écart* la différence entre cette valeur particulière et la valeur fixe, qui serait le résultat moyen d'un nom- bre infini d'observations. Ces erreurs ont des limites vraisemblables, c'est-à- dire qu'il est extrêmement probable

voisines, pour l
lité de l'erreur e
sorte qu'il peut ar
ou que l'erreur e
qu'elle y soit com
En général, de
moyen d'un grand
particulières, c'es
tité avec un instr
augmenter la pré
le veut, en augme
le nombre des val
Il nous reste à

re des limites proposées A + D et
- D : A est le résultat moyen que
a trouvé, et D est une quantité
posée que l'on ajoute à la valeur A
que l'on en retranche. La table sui-
ite fait connaître la probabilité P
ne erreur positive ou négative plus
nde que D; et cette quantité D est
produit de *g*, dont nous avons parlé
s haut, par un facteur proposé *d*.

d	P
0,47708	$\frac{1}{2}$
1,38591	$\frac{1}{20}$
1,98495	$\frac{1}{200}$
2,46130	$\frac{1}{2000}$
2,86783	$\frac{1}{20000}$

qui est l'objet de la recher
comprise entre les limites A
A — D. La quantité D est égal
duit $g. d$, comme nous l'avon
voit par cette table que la pr
d'une erreur plus grande que l
de g par o, 47708, est $\frac{1}{2}$. I
1 contre 1 à parier que l'err
mise ne surpassera pas le pro
par o,47708. Dans le calcul
avons fait plus haut pour d
la précision de la valeur moye
série de nombres, nous avo

obtient 0,039 à peu près. Ainsi il y avait 1 contre 1 à parier que l'erreur commise ne surpassait pas 0,039.

La probabilité d'une erreur plus grande que le produit de *g* par 1,38591 est beaucoup plus petite que la précédente; elle n'est que $\frac{1}{20}$. Il y a 19 sur 20 à parier que l'erreur du résultat moyen ne surpassera pas ce second produit.

La probabilité d'une erreur plus grande que la précédente devient extrêmement petite, à mesure que le facteur D augmente. Elle n'est plus que $\frac{1}{2000}$ lorsque *d* approche de 2. La probabilité tombe ensuite au-dessous de $\frac{1}{2000}$. Enfin, il y a beaucoup plus de 20000 à parier contre 1 que l'erreur du résultat moyen sera au-dessous du triple de la valeur



pour le résultat m
der comme à peu-
valeur 6 n'est pas e
tité triple de la fra
règle a donnée po
moyenue fixe cher
prise entre 6 — o,

Pour faciliter le
de g, on pourra co
les entre elles des
qui différeraient tr
buant ainsi une gr
un certain nombre

on calcule la précision d'une valeur moyenne, que *cette précision augmente comme la racine carrée du nombre des observations*. Supposons, par exemple, qu'on ait fait d'une part 100 observations; et, de l'autre, 400 observations; la précision de la moyenne qu'on déduira de la première série d'observations sera à la précision de la moyenne qu'on déduira de la seconde série, toutes les circonstances étant égales d'ailleurs, comme 10 est à 20, c'est-à-dire comme les racines carrées des nombres 100 et 400. Donc, pour une même recherche, la précision du résultat moyen change à mesure que le nombre des valeurs observées augmente. Elle devient double si le nombre des valeurs devient

de suite. Cette c
et remarquable ;
de tous ceux qui
ches statistiques
il faut multiplier
que les résultats
donné d'exactitu

Qu

Quand on a la
plusieurs quantit
la précision de ce
Exposez la règl

moyenne cherchée ne s'éloignera pas de limites assignées?

Donnez des exemples du calcul de cette probabilité?

Comment peut-on simplifier les calculs ?

Dans quel rapport la précision d'une valeur moyenne augmente-t-elle relativement au nombre des observations?

Donnez un exemple numérique.

XVe LEÇON.

—

Applications du calcul des pro
à la vie humaine.

Une des applications les plu
santes du calcul des probabili
formation des *tables de mor*
ont pour objet de faire conna
d'après laquelle s'éteignent s
ment un certain nombre d
nés à une même époque.

law en Silésie, l'énumération de tous les individus qui, pendant l'espace de quatre ans, étaient morts entre 0 et 1 an, entre 1 et 2 ans, entre 2 et 3 ans et ainsi de suite jusqu'au terme le plus reculé de la vie : regardant alors la population comme stationnaire, c'est-à-dire, comme offrant annuellement un nombre de décès égal au nombre des naissances, il supposa que tous les individus dont il avait énuméré les décès, étaient nés en même temps ; et il déduisit de leurs âges respectifs, la loi d'après laquelle ils s'étaient éteints successivement. Il fit donc la somme de tous les décès, et il en retrancha le nombre des enfans morts entre 0 et 1 an, le reste indiqua le nombre des sur-

et ainsi de suite.

La méthode que

quer suppose une

naire, ce qui se prés

reste, si elle laisse à

côté de l'exactitude

grands avantages p

l'exécution. La tabl

ne la *loi de la mort*

vinces méridionale

indique comment 10

en même temps s'ét

vement.

LOI DE LA MORTALITÉ.

ns.	Individus.	Ans.	Individus.	Ans.	Individus.	Ans.	Individus.
0	100,000	28	45,866	56	27,155	84	2,929
1	77,507	29	45,284	57	26,357	85	2,429
2	69,470	30	44,709	58	25,547	86	2,000
3	64,799	31	44,147	59	24,727	87	1,619
4	61,899	32	43,589	60	23,890	88	1,285
5	59,864	33	43,023	61	23,041	89	998
6	58,726	34	42,448	62	22,176	90	744
7	57,800	35	41,857	63	21,296	91	537
8	57,129	36	41,249	64	20,402	92	378
9	56,557	37	40,629	65	19,493	93	267
0	56,077	38	39,990	66	18,571	94	204
1	55,660	39	39,335	67	17,636	95	150
2	55,409	40	38,670	68	16,688	96	105
3	54,919	41	37,999	69	15,731	97	76
4	54,569	42	37,322	70	14,761	98	54
5	54,226	43	36,638	71	13,769	99	38
16	53,883	44	35,948	72	12,781	100	25
17	53,533	45	35,252	73	11,718	101	19
18	53,167	46	34,549	74	10,697	102	16
19	52,643	47	33,840	75	9,679	103	13
0	51,956	48	33,125	76	8,706	104	10
1	51,132	49	32,406	77	7,810	105	7
2	50,309	50	31,671	78	6,977	106	4
3	49,498	51	30,940	79	6,213	107	2
4	48,703	52	30,199	80	5,501	108	1
5	47,939	53	29,452	81	4,798	109	0
6	47,218	54	28,698	82	4,134		
7	46,528	55	27,871	83	3,504		

principales ap[illegible]
On nomme *vie probable*, le [illegible]
d'années après lequel la probabilité
d'exister et celle de ne pas exister sont
les mêmes, ou bien, le nombre d'an-
nées après lequel les individus d'un
même âge, se trouvent réduits de moi-
tié. La table précédente nous montre
que les 100,000 individus que nous sup-
posons nés simultanément se trouvent
réduits à 50,000 entre 22 et 23 ans; la
probabilité de vivre encore à 22 ans e[illegible]
demi, pour l'enfant naissant, c'est
dire la vie probable, est donc $\frac{50000}{100000}$
[illegible] en France d[illegible]

est en Angleterre de 27 à 28 ans. La vie probable est très-courte dans les grandes villes; elle tombe à Paris entre 8 et 9 ans; à Londres, un peu avant 3 ans; à Vienne, un peu avant 2, un peu après à Berlin; et à Bruxelles après 23 ans.

La vie moyenne se calcule en supposant qu'on fasse un partage égal de tous les âges des individus que l'on considère dans les tables de mortalité.

Elle est dans nos provinces	de 30	ans	4	mois.
Elle est en France	— 28	—	9	—
à Londres	— 17	—	11	—
à Northampton	— 25	—	2	—
à Vienne	— 15	—	9	—
à Berlin	— 17	—	1	—
en Suisse	— 37	—	1	—

On peut, au moyen de la table de

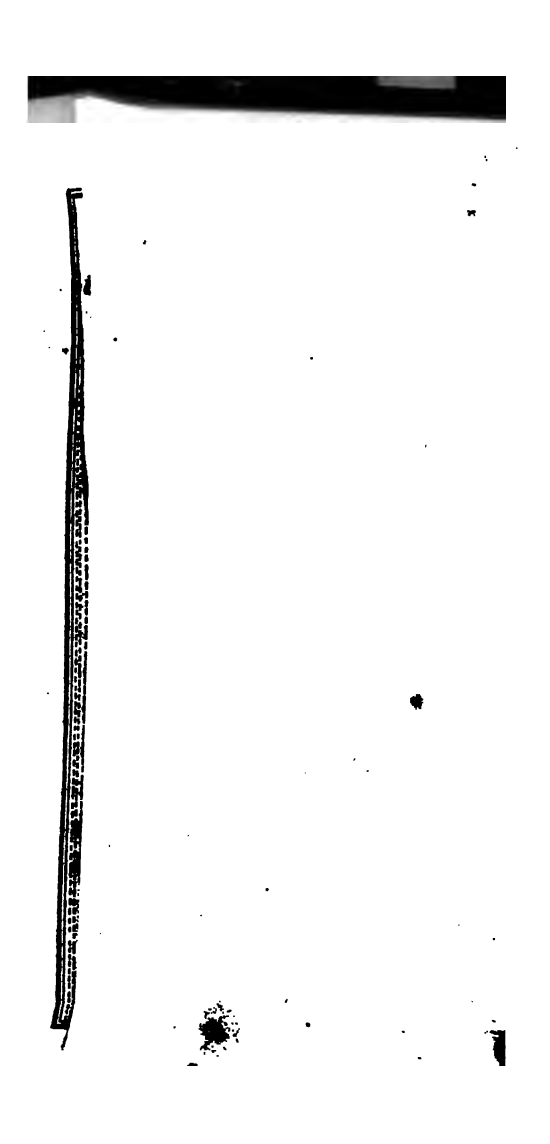
... un âge quelconque;
demandait, par exemple, quell
probabilité de vivre encore 12
pour un individu âgé de 30 ans
chercherait combien il reste de s
vans à 30 et à 42 ans, et l'on trouv
par la table, les nombres 44709 et 37
Le premier nombre devrait être co
déré comme le nombre total des ch
ces; et le second, comme le nom
de chances favorables, la probabil
demandée serait donc $\frac{37322}{44709}$; on tr
verait

ı moitié du nombre des individus de
ɜt âge et l'on aurait 22354. Ce nombre
ɔrrespond dans la table à 62 ans à
eu près ; il y a donc 1 contre 1 à pa-
er que l'individu de 30 ans pourra
:teindre 62 ans ; et l'on dit que la vie
robable de l'homme de 30 ans est de 32
ıs ; en France, elle n'est pas tout-à-
ıit de 30 ans.

La vie probable est plus ou moins
rande selon les âges : elle est à son
aximum dans presque tous les pays
ers 4 à 5 ans. Dans les provinces mé-
dionales des Pays-Bas, la vie proba-
le est à son *maximum* vers 5 ans, et
le est de 47 à 48 ans ; en France, elle
*mb*e entre 4 et 5 ans et vaut près de
ans.

tombe dans nos p[...] en Angleterre,
entre 5 et 6 ans; en Angleterre, [...]
6 et 7 ans, d'après *Price*; en Fran[ce]
entre 5 et 6 ans, d'après *Duvilard*
sa valeur est de 41 à 45 ans.

On peut aussi déterminer la p[...]
bilité que deux personnes dont l[...]
sont désignés, vivront encore a[...]
certain nombre d'années. Cett[e]
bilité est alors composée des [...]
babilités simples que chacu[ne]
personnes vivra encore à l'ép[...]
gnée : par exemple, quelle e[...]
[...] d'un individu âgé [...]



ıction exprime la probabilité
encore 12 ans quand on a at-
: de 20 ans. Le produit indiqué
: vaut à peu près $\frac{7}{10}$.
ıurrait de la même manière
er la probabilité que trois,
ı un plus grand nombre de per-
ivront encore après un temps

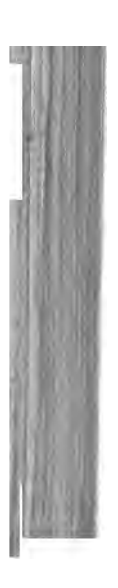
ut rendre la loi de la mortalité
à l'œil par une construction
que (*voyez la planche*) ; on
:et effet sur une droite *oa*, un
ıombre de parties égales dont
ıeurs représentent des temps
ıar exemple des années. Puis
ın des points de division, on
's perpendiculaires qui repré-



représente donc un c
d'individus, nés en mên
conde représente le, n(
vans à l'âge d'un an, et
Chaque perpendiculaire
bre de survivans, et cet
laire décroit insensiblen
que ces survivans s'éteig
qu'elle devienne nulle q
sente la plus longue dur(
courbes construites de
pour les différens pays ne
pas exactement. Ces lig

notre construction, la ligne supérieure indique, en s'abaissant, le décroissement progressif du nombre des individus nés en même temps, pour nos provinces méridionales. La seconde ligne, qui marque un décroissement plus rapide, est applicable à la France.

La table de mortalité que nous avons donnée peut encore servir à déterminer combien, sur une population, on compte d'individus d'un âge déterminé, ce qui constitue la *loi de la population*; que l'on fasse en effet la somme de tous les nombres que contient la table, et si l'on considère ce nombre comme représentant la population, les nombres particuliers de la table représenteront les individus des différens âges



qu'il naît généraleme
que de filles; et ce
été faite dans tous le
des naissances mascu
ces féminines, est

Dans les Pays-Bas comme

En France —

Dans le Roy. de Naples co

En Angleterre .

Il est remarquable
servations de dix ans
n'est pas le même pou
campagnes du royau

Dans l'estimation de la population, on a aussi l'habitude de chercher le rapport de la population aux naissances et aux décès ; ces rapports, pour notre pays, et d'après dix années d'observations recueillies par la *commission de statistique du royaume*, ont les valeurs suivantes :

	VILLES.	CAMPAGNES.	
1 naissance par. .	26,07	29,14	individus
1 décès — .	32,61	43,83	—

On trouve aussi qu'il faut compter 1 mariage par 132 individus ; et pour chaque mariage on compte de 4 à 5 enfans ou plus exactement 4,56. Ce dernier rapport est la *mesure de la fécondité* ; il varie selon les pays, comme on peut le voir par le tableau suivant :

Moscovie. . . . . . .

Province de Bergame. .

Portugal. . . . . .

Partie de l'Écosse. . .

Moravie et Silésie. . .

Pays-Bas. . . . . .

France . . . . . .

Suède. . . . .

Angleterre . . . . .

Les quantités de naissa
cès ne sont pas les mêmes
mois de l'année, mais ell
un *maximum* et un *minim*
tités, malgré les modific
doivent subir par la diffé

;ervations de 18 années receuil-
ruxelles. Elle a été vérifiée depuis
us de 13 millions d'observations
llies par M. *Villermé*, sur diffé-
oints du globe, lesquelles parais-
e plus laisser de doute à cet égard.
se former une idée de cette loi,
ira de jeter les yeux sur le ta-
ci-joint, qui est le résultat des
·ches faites à Bruxelles.

	DÉCÈS.	NAISSANCES.
ier	1,172	1,040
er	1,110	1,157
. . . .	1,100	1,099
. . . .	1,068	1,079
. . . .	0,995	0,989
. . . .	0,916	0,956
t.	0,806	0,901
. . . .	0,844	0,903
mbre	0,884	0,940
re	0,954	0,949
mbre	0,975	0,968
nbre	1,175	1,172

Nous finirons cette leçon pa
marque concernant un préjug
lement répandu parmi le peu
prétendu danger d'être 13 à
l'on suppose 13 personnes
rens âges, et si l'on cherc
babilité que l'une d'elles
mourra pendant l'année,
qu'il y a environ 1 contre
pour l'arrivée d'un décès au
calcul, au moyen d'une m
terprétation, a pu donner lie
jugés d'autant plus ridicul

convives, ce qui ne fait qu'augmenter la probabilité que l'événement que l'on redoute aura lieu.

Questions.

Quel est l'objet des tables de mortalité ?

Comment construit-on une table de mortalité ?

Cette méthode de construction présente-t-elle des inconvéniens ?

Qu'est-ce que la vie probable ?

Quelle est la vie probable dans les principaux royaumes et dans quelques capitales de l'Europe ?

Qu'est-ce que la vie moyenne ?

Dites qu'elle est la vie moyenne dans différens lieux ?

d'années, à un âge d

Comment faut-il ca

bable, à un âge donn

A quel âge la vie p

son *maximum*?

A quel âge la vie

à son *maximum*?

Quelle est la prol

individus vivront e

taine époque?

Peut-on rendre la

sensible à l'œil?

Naît-il généraleme

que de filles?

n dans le royaume des Pays-Bas?
Quelle est la fécondité dans le royau-
: des Pays-Bas?
Les naissances et les décès sont-ils en
ême nombre pendant les différens
ois de l'année?
Que faut-il penser de la crainte qu'é-
ouvent certaines personnes de se
ouver réunies au nombre de 13?



Des assurances et

Les sociétés d'*assu*
de mettre, moyer
rétributions, les h
chances qui mena
De là, les assuran
hommes, les assura
die, contre l'intem
contre les dangers
L'assurance sur la

l'une somme plus petite payée annuellement, on a droit à un capital ou à une rente au bout d'un certain temps. Le contrat reçoit le nom de *police d'assurance*; on nomme *prix de l'assurance* la somme payée une seule fois pour toutes, et *prime d'assurance* celle qu'on paie annuellement.

Il existe différens modes d'assurances; nous ferons connaître les principaux.

Une personne, dans la vue de laisser, après sa mort, un capital à sa famille, peut demander une assurance sur sa vie. Cette assurance sera faite ou pour un temps déterminé, tel qu'un an, deux ans, trois ans, etc., ou pour la vie entière. Dans le premier cas, si



à prétendre; dans
conditions de la pol
être remplies (*).

On calcule ce qu
en observant que
thématiques doiven
et d'autre, abstract
de l'assureur. Si l'o
le prix d'une assura
tuée pour un an,
n'y a qu'une probab

(*) Dans la plupart de
il y a cependant des cas

ande que l'assureur devra effectuer
paiement de 100 fl., et cette proba-
lité dépend de l'âge de l'assuré. Il
udra donc, pour l'équité, que ce der-
er paie une somme égale à la valeur
i'il espère multipliée par la probabi-
té de l'obtenir. Si l'assuré avait 40 ans,
probabilité de mourir dans le cours
l'année serait, d'après notre table,
$\frac{71}{670}$ et cette fraction multipliée par
o donnerait le prix de l'assurance,
est-à-dire fl. 1,74 environ. Par les ta-
es de mortalité de France, on obtien-
ait fl. 1,89. C'est ce que fait payer la
mpagnie d'assurances générales éta-
ie à Bruxelles; la *société de l'union*
lge et étrangère fait payer fl. 1,87.
es sociétés suivent la table de morta-

France. ...

sureur se réduit ici aux intér
somme versée par l'assuré. Ce
pourra paraître plus conside
l'on observe qu'on n'assure
personnes se portant actuellem
et pour lesquelles la proba
mourir est conséquemment bi
forte que celle indiquée par les

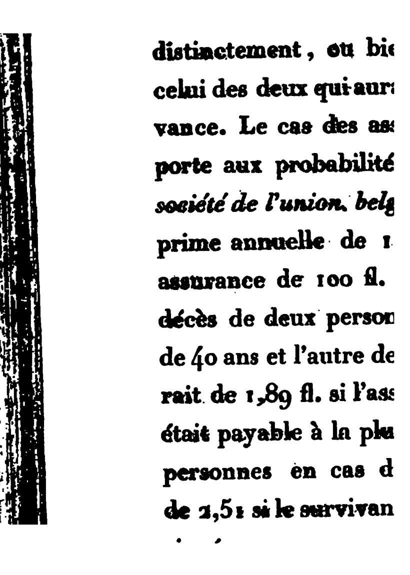
Quand il s'agit d'un terme
qu'un an, les sociétés d'a
tiennent compte de l'intérêt

(*) La *compagnie d'assuranc*
de Bruxelles et celle de l'*union* exi

u'on leur remet. La *société de l'union elge*, par exemple, reçoit fl. 46,39 our prix d'une assurance de 100 fl. ır la vie entière, à l'âge de 40 ans. Il a certitude de payer dans ce cas, ıais après un terme plus ou moins reulé, selon l'âge de l'assuré. Le calcul e réduit alors à examiner quelle somme faut faire payer pour qu'avec ses inérêts, estimés à 3 ou 4 et quelquefois 5 pour cent, elle ait une valeur e 100 fl.

Quelquefois au lieu d'un capital, on ssure à ses héritiers une rente qui a ı même valeur que ce capital, et pour ıquelle on paie conséquemment le ıême prix ou la même prime annuelle.

Deux personnes, deux époux par



distinctement, ou bi
celui des deux qui aur
vance. Le cas des as
porte aux probabilité
société de l'union belg
prime annuelle de 1
assurance de 100 fl.
décès de deux person
de 40 ans et l'autre de
rait de 1,89 fl. si l'ass
était payable à la plu
personnes en cas d
de 2,51 si le survivan

aussi des placemens en viager, des donations en faveur d'enfans, des épargnes hebdomadaires, etc. Les *paiemens viagers* consistent à faire un paiement unique ou à donner des primes annuelles pour acquérir un capital ou une rente à une certaine époque; il faut avoir égard dans le calcul à la vie probable de l'assuré et à l'intérêt de l'argent qu'il fournit. Les *donations en faveur d'enfans* consistent à assurer un capital ou une rente à un individu quand il aura atteint un âge désigné; ce calcul est le même que le précédent. Les *épargnes hebdomadaires* s'accumulent avec leurs intérêts et sont restituées au choix du déposant.

On voit suffisamment d'après ce qui



et l'évaluation des
une certaine somı
toute l'importance
mortalité dressées
pouvoir même étab
hommes et des f
mortalité est gén
chez ces dernières.
besoin d'être renou
nos mœurs et notre
vent des modificati

Les sociétés d'a
être constituées pa

dans la pratique que ces deux derniers genres d'établissemens. Les sociétés particulières sont un objet de spéculation, où souvent les avantages des assureurs sont immenses; les associations mutuelles, où les assureurs sont assurés, se régissent par elles-mêmes et sont intéressées à faire valoir les intérêts communs avec le plus d'économie possible. Il existe en outre beaucoup de sociétés d'un genre mixte, ce sont des sociétés particulières où les assurés sont représentés et ont une part dans les bénéfices.

Les assurances contre les dangers de la mer, contre l'incendie, contre l'intempérie des saisons, etc., ont besoin de s'appuyer sur l'observation de faits

qu'en stricte rigueur et en
jours abstraction du bénéfi
reurs, *la somme déposée*
devrait valoir le produit
de la propriété qu'il fait
la probabilité qu'il a de la

Il s'est établi à Paris e
caisse d'épargne et de pré
mériterait d'être imitée
pays (*). « Loin d'avoir
fondateurs un objet de
cette caisse est adminis
ment par eux; elle a re

nation qui suffit aux dépenses jour-
lières de la comptabilité : elle a pour
ique but de présenter aux moindres
nomies, sans frais et sans risques
ur l'avenir, un placement avanta-
ux, offert seulement, partout ailleurs,
les sommes assez élevées. »
Les sociétés d'assurances et les cais-
d'épargnes sont des établissemens
inemment utiles quand ils sont ad-
nistrés dans des vues sages ; ils ont
illeurs un but moral en faisant fruc-
er les économies de l'homme pré-
vant, soit à son avantage, soit au
néfice de personnes qui lui sont chè-
. On peut encore les considérer
nme inspirant l'amour du travail et
bon ordre, puisque les intérêts de

aux gouvernemen
mais elles leur fer
d'honneur, et ell
des moyens les pl
solider la tranqui
en améliorant la
Les gouvernemens
pas assez qu'en fa
téresseraient un n
dus à leur existen

Que

Quel est le but

Que signifient les mots prix et prime d'assurance?

Quels sont les principaux modes d'assurances sur la vie?

Donnez quelques exemples des principaux modes d'assurances?

Peut-on faire des assurances sur deux têtes?

Que nommez-vous placemens viagers?

Quels sont les différens modes de sociétés d'assurances sur la vie?

Quel est le principe d'après lequel toutes les sociétés d'assurances devraient se régler?

Les sociétés d'assurances sont-elles avantageuses dans un état?





De la probab

TOUT ce qui c
a été ramené à
lités: on suppos
nombre donné d
dit toujours un
vérité.

EXEMPLE. Si l
dix dépositions
sont régulièrem
la probabilité d

Il est évident que, pour un seul témoin, on ne peut avoir à considérer que deux circonstances, savoir : la vérité ou la fausseté de sa déposition. S'il existe deux témoins, il se présente quatre circonstances à examiner, savoir : la vérité ou la fausseté des deux dépositions et les deux cas où les dépositions seraient contradictoires.

Ex. La probabilité qu'un premier témoin dira vrai est $\frac{9}{10}$; la probabilité qu'un second témoin dira vrai est $\frac{7}{8}$; et les probabilités contraires sont $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{8}$. Si l'on cherche à connaître maintenant les probabilités composées pour les quatre circonstances différentes qui peuvent avoir lieu, on trouvera pour



Les témoins ne di

Le 1er témoin seul

Le 2e témoin seul

Telles sont les
les dépositions
somme vaut l'u
positions sont f
choses l'une, c
cordent, ou bie
toires. L'estimat
ramène alors au

corder que pour dire vrai tous deux ou pour mentir. Or, les calculs précédens nous montrent qu'il y a, dans ce cas, 63 contre 1 à parier, en négligeant toutes les autres chances qu'il devient inutile de prendre en considération, puisque les dépositions ne sont point contradictoires. On a donc pour la probabilité que

Tous deux disent vrai. . . . $\frac{63}{64}$,

Tous deux mentent . . . . $\frac{1}{64}$.

IIe cas. Si les dépositions sont contradictoires, il ne peut plus être question que de savoir lequel des deux témoins a dit vrai. Or, on peut parier 9 pour le premier et 7 pour le second

Le 1er dit vrai . . .

Le 2e dit vrai . . .

S'il fallait calculer
de plus de deux témo
encore dépendre ce
bilités composées,
faudrait multiplier e
babilités simples de
tances isolées que l'
Ex. On va enten
de quatre témoins

·obabilité que leurs témoignages
orderont et quelle est celle que
témoignages seront contradictoi-
On remarquera que les témoins ne
ent s'accorder que pour dire vrai
our mentir; or, la probabilité que
emière circonstance aura lieu, vaut
$\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}$ ou $\frac{6561}{10000}$, et celle
la seconde circonstance aura lieu,
$\frac{1}{10000}$. Donc on a, pour probabilité
accord de tous les témoignages, la
ion $\frac{6562}{10000}$; et, pour probabilité
les témoignages seront contradic-
s, 1 moins la fraction précédente,
en $\frac{3438}{10000}$.

pposons maintenant que les té-
s aient déposé et que leurs déposi-
s'accordent, il ne peut plus être



le calcul pré

a 6561 chan

thèse; et 1 p

pour probab

Les tén

Les té

En suivan

cédens, on

conclusions

1° *Plus o*

augmente la

contradictoires, plus elles sont nombreuses et plus il est probable qu'elles sont conformes à la vérité.

Ces conclusions supposent toutefois que le degré de véracité de tous les témoins surpasse $\frac{1}{2}$. Si l'on admettait une hypothèse contraire, la première conclusion serait encore vraie et la seconde devrait être modifiée de la manière suivante : si les dépositions n'ont pas été contradictoires, plus elles sont nombreuses et plus il est probable qu'elles sont fausses.

Ce qui précède peut nous guider dans l'estimation de la confiance qu'on peut attacher aux *traditions* d'événemens même ordinaires; car on voit facilement qu'un récit doit devenir d'autant moins



moin seul est

qui prend l'inf

Quand il s'a

traordinaire, d

tateurs, la pru

le considérer

parce que le t

peut aussi être

sciences nous r

peut souvent êt

illusions pour d

Quand cet év

nous est transm

perd encore

Ex. Quatre personnes qui ont chacune pour degré de véracité $\frac{9}{10}$, se sont transmis le récit d'un événement extraordinaire, pour la réalité duquel nous aurions parié 1 contre 1, lors même que nous en aurions été témoins nous-mêmes; quelle est la probabilité que la 4e tradition est conforme à la vérité? Il faut multiplier $\frac{1}{2}$, la probabilité de l'événement, par $\frac{6561}{10000}$, la probabilité que chacune des traditions a été vraie; on a ainsi $\frac{6561}{20000}$ ou $\frac{1}{3}$ à-peu près. Ce serait encore ici le cas de rappeler ce que dit le célèbre *La Place*, relativement à la diminution de la probabilité des traditions, qu'il compare à l'extinction de la clarté des objets par l'interposition de plusieurs morceaux de verre. Les tradi

car deux fausses dépo
peuvent répondre à l
tifiant l'inexactitude
vérité peut donc être
férentes manières ,
demment elle ne pou
de l'accord de tous les
un même sens.

Ex. Il s'agit de sa
mort par suite d'un d
la déposition affirmati
bouche ? Or, en sup
fût vrai, il pourrait

		1	2	3	4
2e	témoin	oui	non	oui	non
3e	—	oui	oui	oui	oui.

La vérité peut donc nous être parvenue par trois assertions vraies, ou, de trois manières, par une assertion vraie et deux assertions mensongères. Dans ce calcul, il faudrait avoir égard aux probabilités de chacune de ces assertions, et l'on aurait, en faisant égales à $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{9}$ et $\frac{7}{8}$, les degrés de véracité du 1er, du 2e et du 3e témoin, les probabilités suivantes, en faveur de la vérité:

Oui, oui, oui.	$\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8}$	ou	$\frac{504}{720}$
Oui, non, oui.	$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}$	ou	$\frac{9}{720}$
Non, oui, oui.	$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{8}$	ou	$\frac{7}{720}$
Non, non, oui.	$\frac{1}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8}$	ou	$\frac{8}{720}$

18.

erreur de la ma

1er témoin o
2e — o
3e — n

et les probabilité

Oui, oui, non.

Oui, non, non.

Non, oui, non.

Non, non, non.

duits en erreur de l'une de ces quatre manières, sera donc $\frac{192}{720}$. Cette fraction et la précédente valent ensemble l'unité.

Les exemples précédens suffiront pour montrer comment il faut calculer les probabilités des témoignages et des traditions dans les cas qui se présentent le plus fréquemment. Ils nous apprennent en même temps combien nous devons être en garde contre ce que nous ne pouvons savoir que par témoignage ou par des traditions même écrites, qui sont sujettes à être altérées. Quand il s'agit de temps reculés, le bienfait de l'imprimerie, qui substitue un seul témoignage à une série de traditions qui peuvent dénaturer la vérité, devient un garant sûr pour l'exactitude des faits histori-



qui en étaient juge

(*) Nous allons citer u
combien dans ce cas mê
conspection. Quelques jo
Waterloo, un journal d
personnage auguste, aya
les ennemis et sauvé ensu
ses décorations à ses lib
Mes amis, tous, vous les
fut répété et a été cité de
vrages comme un des fait
établis. Nos descendans
douter de son authenticit
répété sous nos yeux. Ce
l'auteur de ce récit, inno

Questions.

Quelle est l'hypothèse par laquelle on ramène la théorie des témoignages à celle des probabilités ?

Comment estime-t-on les témoignagnes, quand il se présente un ou deux témoins ?

Calculez les probabilités des témoignages, avant la déposition ?

Calculez la probabilité des témoignages, après la déposition ?

Donnez un exemple de ces mêmes calculs pour le cas où il se présenterait un grand nombre de témoins ?

Quels sont les principes qu'on peut déduire de ce qui précède ?

Comment doit-on considérer les traditions ?

le cas des [illegible]
dont nous sommes témoins ?

Comment doit-on considérer les [illegible]nemens extraordinaires que nou[illegible] connaissons que par des tradition[illegible]

Comment doit-on calculer les [illegible]bilités des traditions ou des tém[illegible]gnages successifs rendus simp[illegible] par *oui* ou par *non* ?

Donnez un exemple de ce ca[illegible]

L'imprimerie peut-elle être ut[illegible] établir l'exactitude des faits [illegible]ques ?

XVIIIe LEÇON.

Des décisions des tribunaux et des élections.

La théorie des décisions pourrait se ramener à celle des témoignages, si, sur un même nombre de votes, un juge était toujours exposé à se tromper un même nombre de fois.

Exemples. Supposons que, sur 10 votes, on soit généralement dans le cas de se tromper une fois; on aura pour probabilité d'un bon jugement $\frac{9}{10}$, et pour la probabilité contraire $\frac{1}{10}$.



décision sera
faudra à cet
soient conform
res à la vérité.

Ex. Quelle
trois juges pron
l'unanimité, si
qu'ils méritent
que les trois v
à la vérité est
poduit $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot$
babilité que les
traires à la vé

Le degré de confiance que méritent les juges n'est pas une quantité constante, mais elle varie avec les lieux, les temps, l'état des lumières, les principes politiques, les opinions, etc. Les calculs précédens ne peuvent donc être admis qu'avec circonspection. La nature de l'affaire qui est soumise à des juges doit aussi influer sur leur décision: or, cette décision ne peut être rendue que d'après des preuves morales qui ne sont jamais que des probabilités; car il faudrait s'abstenir de juger si l'on attendait l'évidence mathématique, mais *lorsque les preuves ont une force telle que le produit de l'erreur à craindre par sa faible probabilité, soit inférieur au danger qui résulterait de l'impunité*

par ...

ment se réduit, si je n

La Place, à la soluti

suivante : la preuve d

a-t-elle le haut degré

cessaire pour que l

moins à redouter les

naux, s'il est innoc

que ses nouveaux att

malheureux qu'enh

de son impunité, s'i

absous? Ce qui ren

la question dont

ajoute ce grand géo

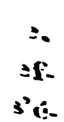
l'accusé. Chaque juge à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact.

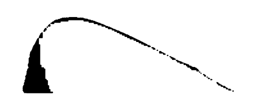
Si nous continuons à suivre *La Place* dans l'examen de la composition des tribunaux, nous trouverons plusieurs conséquences remarquables qu'il importe de signaler.

1° *La majorité exigée demeurant la même, plus le nombre des juges augmente, plus la probabilité de l'erreur augmente également.* Ainsi l'accusé se trouve dans une position moins avantageuse devant un tribunal de huit juges que devant un tribunal de six juges, quand il suffit d'une majorité de deux voix pour le condamner. La probabilité de l'erreur à craindre est plus grande que $\frac{1}{4}$ dans le premier cas, et

ment se réduit, si je ne
La Place, à la solution
suivante : la preuve du
a-t-elle le haut degré d
cessaire pour que le
moins à redouter les
naux, s'il est innoce
que ses nouveaux att
malheureux qu'enha
de son impunité, s'i
absous? Ce qui ren
la question dont
ajoute ce grand géo

...aque juge ...
... rapporter a son prop...
...itutions à sui...
... de la composition ...
... nous trouverons ...
... remarquable ...
...naire.
...jorité exige ... *nombre de juges* ... *la probabilité de* ... *...ellement*. Ainsi l'accusé ... une position moins avanta... un tribunal de huit juges ... un tribunal de six juges ... d'une majorité de deux ... condamner. La probabi... erreur à craindre est plus ... dans le premier cas. ...







d'un jury de do

damnation d'u

bunaux; dans l

exige une maj

que soit le no

se trouvait 21

que la probabil

serait $\frac{1}{5}$; et $\frac{}{8}$

cas d'un jury co

ne suffit donc p

la même.

2° *Quand la*

minorité dans

qui ne peuvent condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près $\frac{1}{4}$, si le nombre des juges est six ; elle est au-dessous de $\frac{1}{7}$, si ce nombre s'élève à douze.

Il est à remarquer qu'avec les mêmes lois et la même organisation de tribunaux, on trouve annuellement le même nombre d'acquittemens sur un même nombre donné d'accusés. On comptait en France, en 1825, sur 7234 accusés, 4594 condamnés, et en 1826, sur 7613 accusés, 4912 condamnés ; d'où il suit que sur 100 accusés, on en a condamné 64 la première année et 65 la seconde. Cette identité de résultats est effrayante, si l'on songe qu'elle doit s'é-

69 en 1826, de 67 en
moyenne pour les 1
précédé était de 67
écarts ont été de 2 u
répression a été en
ainsi, 16 individus se
quittés sur 100 qui p
les tribunaux; prop
mais qui s'explique si
nous n'avons pas le j
nos voisins. Ainsi la m
jury fournit en Fran
à peu près le même

différence dans l'application! telle est cependant l'influence du mode de juger: *le nombre des acquittemens était en France et en Angleterre double de ce qu'il était chez nous.*

On conçoit que les passions doivent souvent déranger les calculs dans ce qui concerne les témoignages et les décisions; il en est de même pour les élections. On peut cependant établir des règles qui, toutes choses égales, présentent des anomalies moindres; c'est ce but qu'on s'est particulièrement proposé d'atteindre dans les modes d'élection.

Le mode d'élection le plus usité est celui qui a lieu à la majorité des voix, il semble laisser peu de chose à désirer

dats; mais s'il [illegible] inconv[illegible]
mode peut avoir des inconv[illegible]
Quand un électeur vote en effet pour
un candidat, il laisse indécis le degré
du mérite qu'il attribue aux autres.

Borda avait proposé de donner au
mérite respectif des candidats, des va-
leurs proportionnelles au rang qu'on
leur assignait dans le scrutin. Supp[osons]
par exemple douze votans et tr[ois]
candidats, *a*, *b*, *c*; supposons de p[lus]
que le scrutin produise 7 fois le nom
a au premier rang et 5 fois au trois[ième]
et que le nom de *b* paraisse
ra[ng] [illegible] rang et

férence ; par le scrutin de *Borda*, nous allons voir que ce serait *b* qui aurait la préférence : en effet, on trouve, pour *a*,

7 . 3 plus 5 . 1 ou 26,

et pour B,

5 . 3 plus 7 . 2 ou 29,

si ce scrutin se faisait de bonne foi, et si la différence des numéros représentait exactement les degrés d'estime, ce mode d'élection devrait être préféré ; mais il peut favoriser la cabale qui affecterait de porter un candidat de mérite au dernier rang, et ouvrirait ainsi une carrière avantageuse à la médiocrité.

Le mode qui semble offrir le plus



de la majorité. Ain
précédent, supposon
soient partagés de ce

6	pour
3	—
2	—
1	—

En comparant le
deux, on trouve q
B, 6 plus 1 fois ;
féré à A, 3 plus 2
doit donc l'emport

Questions.

La théorie des décisions peut-elle être ramenée à celle des témoignages?

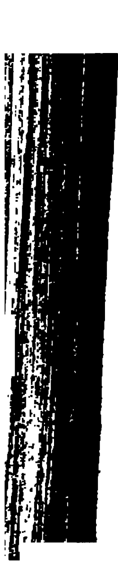
Comment calcule-t-on la probabilité qu'une décision sera rendue à l'unanimité?

Dans quel cas un jugement est-il commandé par l'intérêt général?

Que doit-on observer relativement au nombre des juges, quand la majorité exigée reste la même?

Que doit-on observer, quand la majorité doit être à la minorité dans un rapport géométrique constant?

Quels sont les inconvéniens du mode d'élection à la majorité des voix?



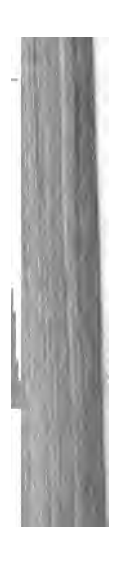
Quel est le n

ble le plus ava

XIXe LEÇON.

Conclusion.

Si nous résumons tout ce qui a précédé, nous serons portés à croire qu'il existe bien peu de choses dont nous puissions acquérir la certitude, et que la plupart de nos connaissances, celles même sur lesquelles nous nous reposons le plus, ne sont fondées que sur des probabilités plus ou moins fortes. Il est donc intéressant de pouvoir apprécier la valeur de ces probabilités, non pour en faire l'application à quel-



des résultats que
mêmes causes
qu'elles soient
existence et leur
seulement révélé
hasard, ce mot
tant abusé, ne
comme servant
rance; c'est un
l'empire le plus
habitué à ne con
qu'isolément; m
vant le philosop

ıut par des écarts qui disparaissent à
yeux quand il sait se placer assez
t pour saisir les lois de la nature. Ces
sont éternelles, immuables comme
elligence d'où elles découlent; il
t pas en notre pouvoir de les dé-
ırer; mais il est de la dignité de
mme de chercher à les saisir au
eu des anomalies sans nombre qu'el-
semblent présenter. Un des plus
ıds mérites des sciences modernes
d'avoir pu faire dépendre des nom-
s la détermination de la plupart des
ıds principes qui paraissaient de-
leur échapper pour toujours; cette
ermination n'a rien d'arbitraire; elle
lonne point prise aux subtilités de
s dont on a tant abusé; c'est par

faits dont elle p...

Ainsi l'on a vu le calcul des p...
lités qui a pris naissance depuis moins
de deux siècles, et qui avait essayé ses
forces naissantes en montrant la vraie
théorie qui doit régler les jeux de toute
espèce, faire tout à coup une excursion
dans le domaine des sciences naturelles
pour indiquer les lois des naissances
de la mortalité, dans celui des scienc...
historiques pour apprécier la val...
des faits et des traditions, dan...
sanctuaire de Thémis pour régl...
composition des tribunaux ou ...
c... la bonté d...

les élections, ou énumérer les richesses et les besoins des peuples par des nombres auxquels nulle éloquence humaine ne pourrait résister. Tout ce qui peut être exprimé numériquement devient de son ressort; plus les sciences se perfectionnent, plus elles tendent à rentrer dans son domaine, qui est une espèce de centre vers lequel elles viennent converger. On pourrait même, comme je l'ai déjà fait observer ailleurs, juger du degré de perfection auquel une science est parvenue par la facilité plus ou moins grande avec laquelle elle se laisse aborder par le calcul, ce qui s'accorde avec ce mot ancien qui se confirme de jour en jour : *mundum numeri regunt*.

FIN.

FIN DE LA TA

